

بسم الله الرحمن الرحيم

دانش اگر در ثریا هم باشد مردمانی از سرزمین پارس بر آن دست خواهند یافت.

پیامبر اعظم (ص)

شرح جامع و نمونه سوالات

ریاضی فیزیک ۱ و ۲

«فیزیک»

مؤلف: ابوذر کیانی



پیشگفتار ناشر

خداوند بزرگ را شاکریم که فرصتی عنایت فرمود تا بتوانیم قدمی در جهت گسترش علم و فرهنگ کشور عزیزمان برداریم و مسیری هموار را در اختیار مخاطبان و داوطلبان علاقمند به ادامه تحصیل قرار دهیم. از آنجائی که در حوزه کتاب‌های درسی و کمک درسی کارشناسی ارشد کتاب‌های زیادی به رشته تحریر در آمده است با این حال وجود یک مجموعه جامع، دقیق، کامل و دارای رفرنس (منابع) مستند احساس می‌شود.

همیشه دغدغه داشتیم که ای کاش می‌شد تمامی منابع پراکنده و گاهاً دست نیافتنی کنکور در یک مجموعه به گونه‌ای جذاب و شیوا آماده می‌شد و همچنین سوالات دوره‌های قبل کنکور نیز به گونه‌ای تشریحی پاسخ داده می‌شدند، که خدش‌های بر آنها وارد نشود و خیال داوطلبان عزیز آنقدر آسوده باشد که اطلاعات مندرج در پاسخنامه‌ها را برای بهره‌گیری در آزمون خود بکار گیرند. این کار با یاری خداوند بزرگ و همکاری نخبه‌ترین دانشجویان و اساتید کشور در انتشارات ارشد هماهنگ گردید و در تمامی مقاطع تحصیلی از کاردانی به کارشناسی، کارشناسی ارشد و دکتری در حوزه آزمون‌های سراسری – آزاد و پیام نور بسته‌های آموزشی شامل کتاب‌های بانک سوالات و کتاب‌های شرح جامع درس آماده گردید. در تهیه مجموعه‌های فوق‌الذکر از فارغ‌التحصیلان کارشناسی ارشد و دکتری که حائز رتبه‌های تک رنژی کنکور می‌باشند، استفاده کرده‌ایم، تا شما عزیزان بتوانید در راستای افزایش توان علمی خود در جهت نیل به مقصود خویش نایل آید. بدون تردید می‌توان گفت که برای اولین بار در نظام آموزشی کشور مجموعه‌ای به این سبک عرضه می‌شود که در کیفیت و کمیت بی‌نظیر بوده و تمامی نیازهای دانشجویان و داوطلبان عزیز را پوشش می‌دهد. امید است که استفاده از این مجموعه عزیزان را در جهت موفقیت در آزمون یاری رسانده باشد. در پایان لازم به ذکر است که بی‌نقصی محض از آن خداوند متعال می‌باشد، بنا براین از تمامی خوانندگان و داوطلبان عزیز خواهشمندیم نظرات سازنده خود را در مورد این کتاب به سایت انتشارات ارشد اعلام نمایند تا ما را در جهت هر چه بهتر آماده کردن این محصولات یاری رسانند.

با تشکر

ناشر

www.arshadbook.ir

پیشگفتار مولف

من لم یشکر المخلوق، لم یشکر الخالق

اکنون که با یاری خداوند متعال کار کتاب را به اتمام رسانده، لازم می‌دانم از همه کسانی که در این زمینه این جانب را کمک و یاری نموده‌اند تشکر و قدردانی نمایم.

نخست بر خود لازم می‌دانم که از اساتید زندگیم، پدر و مادر عزیزم، که در تمام امور تحصیلی مرا یاری نموده و نیرو و امید بخشیده و به خاطر تلاش‌های خستگی‌ناپذیری آنها، صمیمانه سپاسگزاری نمایم.

لازم می‌دانم این نکته را بیان کنم که اخلاق و رفتار اساتید خوبم آقای دکتر مسعود عبدالله‌زاده و دکتر ناصر منصور شریفلو، دکتر سید محمود سادات کیائی و مهندس یوسف ال‌گونه جونقانی که اخلاق و رفتار ایشان برای من نمونه‌ای از درس اخلاق بود که هیچ‌گاه فراموش نمی‌کنم. امیدوارم بتوانم راه و روش انسانی آنها را در زندگی سرمشق قرار دهم. دوام عمر و توفیق کامل ایشان را از خداوند بزرگ خواستارم و امیدوارم در پرتو عنایت خداوند منان، همواره در مراحل زندگی و کار موفق و موید باشند.

توفیق روزافزون و سعادت و سلامتی را برای همه کسانی که به نحوی در راستای علم و آگاهی به من کمک نموده‌اند از خداوند منان خواستارم.

با سپاس
ابوذر کیانی

فهرست مطالب

عنوان

صفحه

فصل اول: حساب برداری

۳۸	 تست‌های تألیفی آخر فصل
۴۰	 پاسخ تست‌های تألیفی آخر فصل
۴۰	 پاسخ تست‌های تألیفی آخر فصل
۴۲	 تست‌های آخر فصل
۴۳	 پاسخ تست‌های آخر فصل

فصل دوم: دستگاه‌های مختصات

۵۶	 تست‌های آخر فصل
۵۷	 پاسخ تست‌های آخر فصل

فصل سوم: حساب تانسوری

۷۷	 تست‌های آخر فصل
۷۸	 پاسخ تست‌های آخر فصل

فصل چهارم: ماتریس و دترمینان

۱۱۲	 تمرینات آخر فصل
۱۱۳	 تست‌های آخر فصل
۱۱۴	 پاسخ تست‌های آخر فصل

فصل پنجم: دنباله و سری

۱۳۵	 تست‌های آخر فصل
۱۳۷	 پاسخ تست‌های آخر فصل

فصل ششم: سری فوریه

۱۵۱	 تمرینات آخر فصل
۱۵۲	 تست‌های آخر فصل
۱۵۴	 پاسخ تست‌های آخر فصل

فصل هفتم: اعداد مختلط و توابع تحلیلی مختلط

۱۷۵	 تست‌های آخر فصل
۱۷۷	 پاسخ تست‌های آخر فصل
۱۷۹	 تمرینات آخر بخش
۱۹۶	 تست‌های آخر فصل
۱۹۷	 پاسخ تست‌های آخر فصل

فصل هشتم: انتگرال‌های مختلط

۲۴۱	 تست‌های آخر فصل
۲۴۲	 پاسخ تست‌های آخر فصل

فصل نهم: توابع متعامد

فصل اول

حساب برداری

عناوین اصلی

- ◀ فوای بردارها
- ◀ میدانهای ندرهای و برداری
- ◀ انتگرال برداری
- ◀ قضیه واگرایی و استوکس

فصل اول

حساب برداری

تعریف‌ها

کمیت اسکالر: کمیتی که فقط بزرگی دارد، مانند جرم، زمان و دما.

کمیت برداری: برخی کمیت‌ها علاوه بر بزرگی، جهت (راستا و سو) نیز دارند، به این نوع کمیت‌ها کمیت برداری گویند. مانند سرعت، جابجایی و

باید توجه داشت که کمیت‌های برداری از قاعده جمع برداری پیروی می‌کنند و در صورتی که کمیتی از این قاعده پیروی نکند، کمیت برداری نیست.

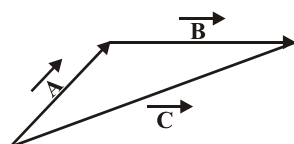
جمع برداری

جمع برداری از دو قانون پیروی می‌کند:

۱- قانون مثلثی

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$$

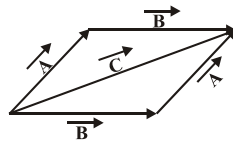
قانون مثلثی جمع برداری عبارت است از قرارگرفتن ابتدای بردار $\vec{B}$ در انتهای بردار $\vec{A}$. در این صورت بردار $\vec{C}$ با پیکانی نمایش داده می‌شود که ابتدای A را به انتهای B وصل می‌کند.



$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$$

۲- قانون متوازی الاضلاع

در این قانون دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ از یک نقطه شروع می‌شوند و قطر متوازی‌الاضلاع حاصل از این دو بردار، جمع برداری است.



$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$$

اندازه جمع برداری

برآیند دو بردار یا اندازه جمع بردارها از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$|\vec{C}| = \sqrt{|\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 + 2|\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta}$$

که θ زاویه بین دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ می باشد.

خصوصیات جمع برداری

۱- جمع برداری، تعویض پذیر است.

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$$

$\vec{C}$: برآیند دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ است.

۲- جمع برداری شرکت پذیر است.

$$(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C})$$

۳- جمع برداری توزیع پذیر است.

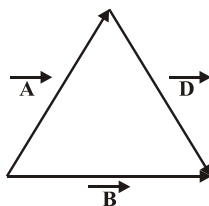
$$\begin{cases} (c+d)\vec{A} = c\vec{A} + d\vec{A} \\ c(\vec{A} + \vec{B}) = c\vec{A} + c\vec{B} \end{cases}$$

تفاضل دو بردار

برای تفریق دو بردار، ابتدا منفی یک بردار را به صورت برداری با همان بزرگی ولی در جهت عکس یا مخالف در نظر می‌گیریم.

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$$

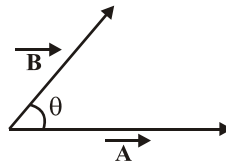
برای رسم بردار تفاضل دو بردار، دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ را از یک نقطه رسم کرده بردار تفاضل از اتصال انتهای بردار $\vec{A}$ به انتهای بردار $\vec{B}$ حاصل می‌شود.



$$\vec{D} = \vec{A} - \vec{B}$$



نکته: در اندازه جمع دو بردار باید توجه کرد که زاویه بین دو بردار θ ، زمانی تعریف می‌شود که دو بردار از یک نقطه شروع شوند.



اگر دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ برحسب مؤلفه‌هایشان برابر باشند با: $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$.

$$|\vec{C}| = \sqrt{|\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 + 2|\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta}$$

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$$

$$\vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}$$

آنگاه:

$$\vec{A} \pm \vec{B} = \hat{i}(A_x \pm B_x) + \hat{j}(A_y \pm B_y) + \hat{k}(A_z \pm B_z)$$

در فیزیک بردارها به دو صورت کاملاً متمایز مطرح می‌شوند:

۱- بردار $\vec{B}$ نشان دهنده تک نیرویی است که بر تک نقطه وارد می‌شود.

۲- بردار $\vec{B}$ روی ناحیه گسترده‌ای تعریف شده باشد: یعنی بردار $\vec{B}$ و مؤلفه‌هایش تابع مکان باشند مثلاً:

$$\vec{A}_x = \vec{A}_x(x, y, z)$$

محورهای مختصات

در یک فضای N بعدی، N جهت را که از مبدأ O می‌گذرد، به عنوان محور مختصات در نظر می‌گیریم. باید دقت کرد که نام محور از نام مختصه گرفته می‌شود، مانند مختصه y و محور y .

محورهای مختصات می‌توانند برهم عمود باشند که در این حالت دستگاه مختصات را متعامد گویند و یا تعدادی از آنها برهم عمود باشند که در این حالت دستگاه مختصات را غیرمتعامد گویند.

نکته: ممکن است در یک دستگاه مختصات جنس محورها متفاوت باشند. به عنوان مثال در دستگاه کروی که دستگاهی متعامد است از سه مختصه r ، θ و φ ، استفاده می‌شود که r از جنس طول و θ و φ زاویه هستند.

اگر محورهای مختصات در تمام نقاط فضا ثابت باشد و یا به عبارتی محورهای مختصات خط راست باشند، دستگاه را راست خط گویند، و اگر تمام یا بعضی از محورها جهت مشخصی در فضا نداشته باشد، دستگاه را خمیده خط گویند؛ از جمله دستگاه‌های خمیده خط، دستگاه استوانه‌ای و کروی است.

خصوصیات بردارها

هر سه تایی مرتب از اعداد (x_1, x_2, x_3) یک بردار، نامیده می‌شود. عدد x_n را مؤلفه n ام بردار $\vec{X}$ می‌نامند.

پنج خاصیت زیر را برای بردارها در یک فضای برداری حقیقی سه بعدی تعریف می‌کنیم، اگر:

$$\vec{X} = (x_1, x_2, x_3) \quad , \quad \vec{Y} = (y_1, y_2, y_3)$$

۱- تساوی برداری $\vec{X} = \vec{Y}$ یعنی $x_i = y_i$

۲- جمع برداری $\vec{X} + \vec{Y} = \vec{Z}$ یعنی $x_i + y_i = z_i$ ، $i = 1, 2, 3$

۳- ضرب در یک کمیت اسکالر $(a\vec{x}) = (ax_1, ax_2, ax_3)$ (a حقیقی)

۴- منفی یک بردار: $-\vec{x} = (-1)\vec{x} = (-x_1, -x_2, -x_3)$

۵- بردار صفر: $\vec{0} = (0, 0, 0)$

چون مؤلفه‌های برداری عدد هستند، در نتیجه:

۱- جمع برداری تعویض پذیر است. $\vec{Y} + \vec{X} = \vec{X} + \vec{Y}$

۲- جمع برداری شرکت پذیر است. $(\vec{X} + \vec{Y}) + \vec{Z} = \vec{X} + (\vec{Y} + \vec{Z})$

۳- ضرب در کمیت‌های اسکالر تعویض پذیر است. $(ab)\vec{x} = a(b\vec{x})$

توجه: بردار $\vec{0}$ و منفی یک بردار مفروض یکتا هستند.

مثال

فرض کنید $\vec{u}_1 = 3\hat{i} + 2\hat{j}$ و $\vec{u}_2 = 6\hat{i} + 7\hat{j}$ باشد مقدار $\vec{u}_1 \pm \vec{u}_2$ را به دست آورید.

حل:

$$\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 = (3+6)\hat{i} + (2+7)\hat{j} = 9\hat{i} + 9\hat{j}$$

$$\vec{u}' = \vec{u}_1 - \vec{u}_2 = (3-6)\hat{i} + (2-7)\hat{j} = -3\hat{i} - 5\hat{j}$$

مثال

اگر $\vec{A} + \vec{B} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k}$ و $\vec{A} - \vec{B} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ باشد بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ را به دست آورید.

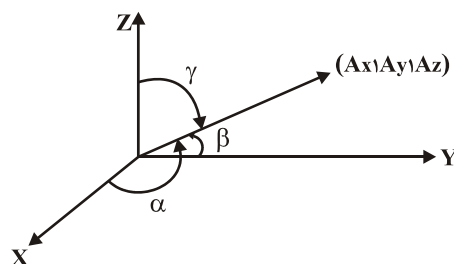
حل:

$$A = \frac{1}{2}[(A+B) + (A-B)] = \frac{1}{2}[(2+3)\hat{i} + (2+3)\hat{j} + (-1+6)\hat{k}] = 2.5\hat{i} + 2.5\hat{j} + 2.5\hat{k}$$

$$B = \frac{1}{2}[(A+B) - (A-B)] = \frac{1}{2}[(3-2)\hat{i} + (2-3)\hat{j} + (6+1)\hat{k}] = 0.5\hat{i} - 0.5\hat{j} + 3.5\hat{k}$$

روش تحلیل بردارها

علاوه بر نمایش‌های قبل، می‌توان بردار را به صورت دیگری نیز نمایش داد. بردار A را مطابق شکل (۵-۱) در نظر بگیرید.

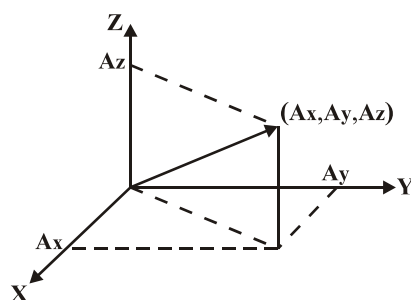


شکل (۵-۱): نمایش بردار

بردار $\vec{A}$ در فضای xyz با مختصات (A_x, A_y, A_z) مشخص می‌شود که به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$$

که A_x ، A_y و A_z تصاویر برداری $\vec{A}$ بر محورهای x و y و z است. (شکل ۶-۱)



شکل (۶-۱): مولفه‌های برداری

چنانچه بردار $\vec{A}$ با محورهای مختصات x ، y ، z به ترتیب زوایای α ، β و γ را بسازد، آنگاه خواهیم داشت:

$$A_x = A \cos \alpha$$

$$A_y = A \cos \beta$$

$$A_z = A \cos \gamma$$

که به $\cos \alpha$ ، $\cos \beta$ ، $\cos \gamma$ کسینوس‌های هادی گویند و به قرار زیر می‌باشند:

α زاویه بردار $\vec{A}$ با محور x ها

$$\cos \alpha = \frac{A_x}{|\vec{A}|} = \frac{A_x}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}}$$

β زاویه بردار $\vec{A}$ با محور y ها

$$\cos \beta = \frac{A_y}{|\vec{A}|} = \frac{A_y}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}}$$

γ زاویه بردار $\vec{A}$ با محور z ها

$$\cos \gamma = \frac{A_z}{|\vec{A}|} = \frac{A_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}}$$

باید توجه کرد که اندازه بردار $\vec{A}$ برابر است با:

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

کسینوس‌های هادی باید در رابطه $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ صدق کنند.

مثال

بردار $\vec{A}$ از مبدأ مختصات به نقطه A به مختصات (۲و۳و۴) رسم شده است. اندازه بردار و زوایای آن را با محورهای مختصات (بردارهای هادی) تعیین کنید.

حل:

$$A = (A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{29} = 5.39$$

$$A_x = A \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{A_x}{A} = \frac{2}{5.39} = 0.371 \Rightarrow \alpha = 68.2^\circ$$

$$A_y = A \cos \beta \Rightarrow \cos \beta = \frac{A_y}{A} = \frac{3}{5.39} = 0.55 \Rightarrow \beta = 56.18^\circ$$

$$A_z = A \cos \gamma \Rightarrow \cos \gamma = \frac{A_z}{A} = \frac{4}{5.39} = 0.74 \Rightarrow \gamma = 42.1^\circ$$

در مثال قبل باید توجه کرد که بردار $\vec{A}$ از مبدأ مختصات شروع شده است، چنانچه از نقطه‌ای غیر از مبدأ شروع شود باید مؤلفه‌های A_x ، A_y و A_z را به دست آورید.

ضرب اسکالر (نرده ای یا داخلی)

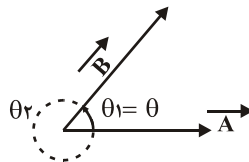
تعریف ۱: دو بردار دلخواه $\vec{A}$ و $\vec{B}$ را در نظر بگیرید. این دو بردار با یکدیگر زوایای θ_1 و θ_2 می‌سازند. زاویه کوچکتر θ_1 را که زاویه بین دو بردار می‌نامند در نظر بگیرید. $0 \leq \theta_1 = \theta \leq \pi$ می‌باشد. حاصل ضرب داخلی دو بردار را به صورت $\vec{A} \cdot \vec{B}$ نمایش داده و چنین تعریف می‌کنند.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \theta$$

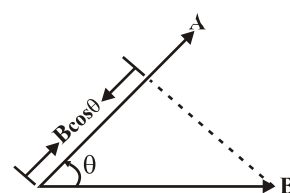
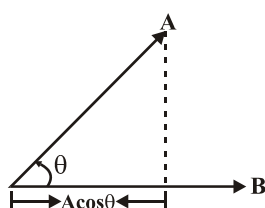
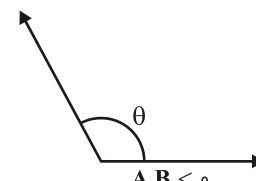
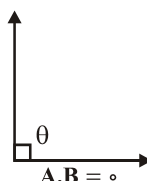
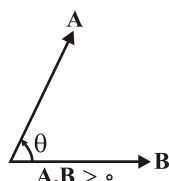
حالت خاص

در صورتی ضرب داخلی دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ صفر است که یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

($|\vec{A}| = 0$ یا $|\vec{B}| = 0$ ، یا A بر B عمود باشد).



با توجه به اینکه مقدار کسینوس، مقداری بین ۱ و -۱ می‌باشد ($-1 \leq \cos \theta \leq 1$) پس ضرب داخلی دو بردار می‌تواند مثبت، منفی یا صفر باشد. طبق شکل (۸-۱)



باید توجه کرد که:

$|B| \cos \theta$ (تصویر بردار B در راستای A)

و $|A| \cos \theta$ (تصویر بردار A در راستای B)

اگر P طول تصویر بردار A در راستای B باشد، آنگاه طبق شکل (۹-۱) داریم:

$$P = |A| \cos \theta \Rightarrow P = \frac{|\vec{A}| |\vec{B}| \cos \theta}{|\vec{B}|} = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{B}|}$$

همچنین بردارهای یکه $\hat{i}$ و $\hat{j}$ و $\hat{k}$ در روابط زیر صدق می‌کنند:

$$\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1$$

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{i} \cdot \hat{k} = \hat{j} \cdot \hat{k} = 0$$

$$\hat{j} \cdot \hat{i} = \hat{k} \cdot \hat{i} = \hat{k} \cdot \hat{j} = 0$$

تعریف ۲: ضرب نرده‌ای دو بردار برحسب مؤلفه‌هایشان به صورت زیر تعریف می‌شود:

و زاویه بین دو بردار برابر است با:

$$\cos \theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| |\vec{B}|}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad \text{و}$$

باید توجه کرد که تعریفهای ۱ و ۲ در حالت خاصی که بردارها در یک صفحه واقع باشند، آسان است. حال فرض کنیم

بردارهای A و B در صفحه xy واقع باشند و زوایایی که با جهت مثبت محور x می‌سازند به ترتیب θ_1 و θ_2 ($\theta_2 > \theta_1$) باشند،

آنگاه داریم:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos(\theta_2 - \theta_1)$$

$$\cos(\theta_2 - \theta_1) = \cos \theta_2 \cos \theta_1 + \sin \theta_2 \sin \theta_1$$

$$\Rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = (A \cos \theta_1)(B \cos \theta_2) + (A \sin \theta_1)(B \sin \theta_2) = A_x B_x + A_y B_y$$

نکته: اگر بردارهای یکه را در حالت کلی با e_m و e_n نشان دهیم، خواهیم داشت:

$$e_m \cdot e_n = \delta_{mn} = \begin{cases} 1 & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

البته این ضرب فقط در مورد دستگاه‌های متعامد، صادق است.

خصوصیات ضرب اسکالر

ضرب نرده‌ای دارای خصوصیات زیر می‌باشد:

۱- ضرب نرده‌ای خطی می‌باشد. $(q_1 \vec{a} + q_2 \vec{b}) \cdot \vec{c} = q_1 \vec{a} \cdot \vec{c} + q_2 \vec{b} \cdot \vec{c}$

۲- ضرب اسکالر متقارن یا جابجایی پذیر است. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

۳- ضرب اسکالر توزیع پذیر است. $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$

۴- نامساوی شوارتز برابر است با: $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| |\vec{b}| \rightarrow |\cos \theta| \leq 1$ چون:

کاربردهای ضرب نرده‌ای

۱- کار مکانیکی انجام شده توسط نیروی ثابتی مانند F روی یک ذره، در یک جابجایی مانند $\vec{d}$ از رابطه $W = \vec{F} \cdot \vec{d}$ به دست می‌آید.

۲- مؤلفه نیرو در راستای مشخص

۳- الکترواستاتیک: در ناحیه‌ای که میدان الکتریکی E داده شده باشد پتانسیل الکتریکی در نقطه‌ای مانند r ، به صورت $v_r = - \int_{\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{s}$ از میدان الکتریکی به دست می‌آید.

مثال: عبارت‌های زیر را محاسبه کنید.

۱- $i \cdot i$

۲- $k \cdot j$

۳- $j \cdot (2i - 3j + k)$

۴- $(2i - j) \cdot (3i + k)$

حل:

۱) $i \cdot i = |i| |i| \cos 0 = (1)(1)(1) = 1$

۲) $k \cdot j = |k| |j| \cos \frac{\pi}{2} = (+1)(+1)(0) = 0$

۳) $j \cdot (2i - 3j + k) = 2j \cdot i - 3j \cdot j + j \cdot k = 0 - 3 + 0 = -3$

۴) $(2i - j) \cdot (3i + k) = 2i \cdot (3i + k) - j \cdot (3i + k)$

$= 6i \cdot i + 2i \cdot k - 3j \cdot i - j \cdot k = 6 + 0 - 0 + 0 = 6$

مثال

زاویه بین دو بردار زیر چقدر است؟

$\vec{A} = 3\hat{i} + 4\hat{j} + \hat{k}$

$\vec{B} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$

$\vec{A} \cdot \vec{B} = 3 - 4 + 1 = 0 \rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \theta = 0$

و چون $|\vec{A}| \neq 0$ و $|\vec{B}| \neq 0$ ، در نتیجه $\cos \theta = 0$ و در نتیجه $\theta = \frac{\pi}{2}$



مثال

اگر $A = (4, 1, 0)$ و $B = (-2, 0, 1)$ باشد. بردار C را طوری تعیین کنید که عمود بر دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ باشد.

$$\vec{C} \cdot \vec{A} = 0 \Rightarrow C_x A_x + C_y A_y + C_z A_z = 0 \Rightarrow 4C_x + C_y = 0 \Rightarrow C_y = -4C_x \quad (1)$$

$$\vec{C} \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow C_x B_x + C_y B_y + C_z B_z = 0 \Rightarrow -2C_x + C_z = 0 \Rightarrow C_z = 2C_x \quad (2)$$

طول بردار C باید برابر واحد باشد یعنی $C_x^2 + C_y^2 + C_z^2 = 1$ و روابط بالا را جایگزین می‌کنیم:

$$C_x^2 + (-4C_x)^2 + (2C_x)^2 = 1 \Rightarrow C_x = \pm \frac{1}{\sqrt{21}}$$

$$C_y = -4C_x = -4\left(\pm \frac{1}{\sqrt{21}}\right) = \mp \frac{4}{\sqrt{21}}$$

$$C_z = 2C_x = 2\left(\pm \frac{1}{\sqrt{21}}\right) = \pm \frac{2}{\sqrt{21}}$$

$$\Rightarrow \vec{C} = \left(\frac{1}{\sqrt{21}}, \frac{-4}{\sqrt{21}}, \frac{2}{\sqrt{21}}\right) \text{ یا } \vec{C} = \left(\frac{-1}{\sqrt{21}}, \frac{4}{\sqrt{21}}, \frac{-2}{\sqrt{21}}\right)$$

تست

اگر $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ و $\vec{b} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ ، کسینوس زاویه بین دو بردار $\vec{a} - \vec{b}$ و $\vec{b}$ کدام است؟

$$\sqrt{\frac{5}{17}} \quad (4)$$

$$\sqrt{\frac{3}{17}} \quad (3)$$

$$-\sqrt{\frac{5}{17}} \quad (2)$$

$$-\sqrt{\frac{3}{17}} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه «۱»

حل:

$$\cos \theta = \frac{(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{b}}{\|\vec{a} - \vec{b}\| \|\vec{b}\|} = \frac{(1)(1) + 4(-1) + (0)(1)}{\sqrt{1^2 + 4^2 + 0^2} \times \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{-3}{\sqrt{17} \times \sqrt{3}} = -\sqrt{\frac{3}{17}}$$

تست

اگر اندازه دو بردار $\vec{a} = 2\hat{i} + (a+1)\hat{j} + 4\hat{k}$ و $\vec{b} = a\hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k}$ برابر باشند کسینوس زاویه بین دو بردار کدام است؟

$$\frac{28}{29} \quad (4)$$

$$\sqrt{29} \quad (3)$$

$$\frac{24}{29} \quad (2)$$

$$\frac{16}{29} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه «۴»

حل:

$$\|\vec{a}\| = \|\vec{b}\| \Rightarrow \sqrt{2^2 + (a+1)^2 + 4^2} = \sqrt{a^2 + 4^2 + 3^2} \Rightarrow a = 2$$

$$\vec{a} = (2, 3, 4) \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|} = \frac{28}{29}$$

$$\vec{b} = (2, 4, 3)$$

تست

اگر زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ منفرجه باشد آنگاه زاویه بین دو بردار $\frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} + \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|}$ و $\frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} + \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|}$ چگونه است؟

(۴) منفرجه

(۳) قائمه

(۲) حاده

(۱) صفر

پاسخ: گزینه «۱»

حل:

می‌دانیم زاویه بین دو بردار $\vec{v}$ و $r\vec{v}$ ($r > 0$) برابر صفر است پس:

$$\vec{v}_1 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{|\vec{a}||\vec{b}| + |\vec{b}||\vec{a}|}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{1}{|\vec{a}||\vec{b}|} \vec{v}_2 = r\vec{v}_2$$

تست

کدام یک از بردارهای زیر با بردار $\vec{v} = (1, -1, 1)$ موازی است؟

- (۱) $-2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ (۲) $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ (۳) $-3\vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{k}$ (۴) $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$

پاسخ: گزینه «۳»

حل:

زیرا بردار گزینه (۳)، -3 برابر بردار $\vec{v}$ می‌باشد.

تست

طول تصویر بردار $\vec{A} = 2\vec{i} - \vec{j}$ بر بردار $\vec{B} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ برابر است با:

- (۱) $\frac{\sqrt{2}}{5}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{5}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

حل:

باید دقت کرد که طول تصویر بردار $\vec{A}$ بر $\vec{B}$ از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\text{proj}_{\vec{B}}^{\vec{A}} = \frac{|\vec{A} \cdot \vec{B}|}{|\vec{B}|} \quad \text{طول تصویر بردار بر } \vec{A} \text{ بردار } \vec{B}$$

پاسخ: گزینه «۳»

$$\text{proj}_{\vec{B}}^{\vec{A}} = \frac{2-1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

ضرب برداری

تعریف ۱: ضرب برداری را به صورت زیر نمایش می‌دهیم.

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$$

در این ضرب، بجای کسینوس زاویه بین دو بردار، سینوس آنها وارد می‌شود.

$$|\vec{C}| = |\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta$$

حاصلضرب برداری، برخلاف حاصلضرب نرده‌ای، یک بردار است و جهت آن عمود بر صفحه $\vec{A}$ و $\vec{B}$ می‌باشد که از طریق

قانون دست راست به دست می‌آید.