
بسم الله الرحمن الرحيم

شرح جامع

ریاضی و آمار

مولف: مهدی حاجی‌احمدی

انتشارات ارشد

پیشگفتار ناشر

خداوند بزرگ را شاکریم که فرصتی عنایت فرمود تا بتوانیم قدمی در جهت گسترش علم و فرهنگ کشور عزیزمان برداریم و مسیری هموار را در اختیار مخاطبان و داوطلبان علاقمند به ادامه تحصیل قرار دهیم. از آنجائی که درحوزه کتاب‌های درسی و کمک درسی کارشناسی ارشد کتاب‌های زیادی به رشته تحریر در آمده است با این حال وجود یک مجموعه جامع، دقیق، کامل و دارای رفرنس(منابع) مستند احساس می‌شود.

همیشه دغدغه داشتیم که ای کاش می‌شد تمامی منابع پراکنده و گاهاً دست نایافتنی کنکور در یک مجموعه به گونه‌ای جذاب و شیوا آماده می‌شد و همچنین سوالات دوره‌های قبل کنکور نیز به گونه‌ای تشریحی پاسخ داده می شدند، که خدشه‌ای بر آنها وارد نشود و خیال داوطلبان عزیز آنقدر آسوده باشد که اطلاعات مندرج در پاسخنامه‌ها را برای بهره‌گیری در آزمون خود بکار گیرند. این کار با یاری خداوند بزرگ و همکاری نخبه‌ترین دانشجویان و اساتید کشور در انتشارات ارشد هماهنگ گردید و در تمامی مقاطع تحصیلی از کاردانی به کارشناسی، کارشناسی ارشد و دکتری در حوزهٔ آزمون‌های سراسری – آزاد و پیام نور بسته‌های آموزشی شامل کتاب‌های بانک سوالات و کتاب‌های شرح جامع درس آماده گردید. در تهیه مجموعه‌های فوق‌الذکر از فارغ‌التحصیلان کارشناسی ارشد و دکتری که حائز رتبه‌های تک رقمی کنکور می‌باشند، استفاده کرده‌ایم، تا شما عزیزان بتوانید در راستای افزایش توان علمی خود در جهت نیل به مقصود خویش نایل آیید. بدون تردید می‌توان گفت که برای اولین بار در نظام آموزشی کشور مجموعه‌ای به این سبک عرضه می‌شود که در کیفیت و کمیت بی‌نظیر بوده و تمامی نیازهای دانشجویان و داوطلبان عزیز را پوشش می‌دهد. امید است که استفاده از این مجموعه عزیزان را در جهت موفقیت در آزمون یاری رسانده باشد. در پایان لازم به ذکر است که بی نقصی محض از آن خداوند متعال می‌باشد، بنا براین از تمامی خوانندگان و داوطلبان عزیز خواهشمندیم نظرات سازنده خود را در مورد این کتاب به سایت انتشارات ارشد اعلام نمایند تا ما را در جهت هر چه بهتر آماده کردن این محصولات یاری رسانند.

با تشکر

ناشـــــر

www.arshadbook. ir

پیشگفتار مولف

سپاس پروردگاری را که علم و فضیلت در سیتره عظمت و علم اوست.

ریاضی و آمار به عنوان یکی از مهمترین دروس دانشگاهی است که همواره مورد توجه طراحان سوال برای آزمون‌های کارشناسی ارشد قرار داشته است. اهمیت انکارناپذیر این دروس برای دانشجویان رشته‌ی مدیریت و حسابداری و تأثیر آن در موفقیت داوطلبان، مؤلف را برآن داشت تا مجموعه‌ای کامل از شرح درس ریاضی و آمار و تست‌های سال‌های گذشته در مجموعه‌ای غنی پدید آورد.

این کتاب دارای ۱۵ فصل است که هر فصل دارای شرح درس و تست‌های سال‌های اخیر در انتهای آن است که در بانک سؤالات به آن‌ها به صورت تشریحی جواب داده شده است.

مجموعه حاضر، حاصل تجربه و تدریس این دروس و برداشتن نکات مورد سوال داوطلبان عزیز می‌باشد.

آنچه که در شرح درس و بانک سؤالات آمده است مرجعی کامل شامل خلاصه درس، تمرین‌های جامع و تست‌های سال‌های اخیر می‌باشد.

امید است با صرف زمان مناسب و انگیزه لازم، نتیجه‌ای را که مؤلف مدنظر دارد، حاصل شود.

یادگیری شما آرزوی قلبی‌ام است.

مهدی حاجی احمدی

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

پیشگفتار ناشر ۳
پیشگفتار مولف ۴

فصل اول: نظریه مجموعه‌ها

تعریف مجموعه ۹
تعریف تعلق داشتن ۹
مجموعه‌ها ۱۵
تفاضل متقارن دو مجموعه ۱۶
افراز یک مجموعه ۱۷
تست‌های آخر فصل ۲۸
پاسخ تست‌های آخر فصل ۳۰

فصل دوم: توابع

دامنه و برد رابطهها ۳۳
روابط معکوس ۳۴
مفهوم تابع ۳۴
تساوی دو تابع ۳۶
تابع یک به یک ۳۷
تابع پوشا یا پوششی ۳۸
تابع معکوس ۳۸
تابع زوج ۳۹
تابع فرد ۳۹
ترکیب دو تابع ۴۰
توابع چندجملهای ۴۲
تابع همانی ۴۲
تابع توان ۴۲
تابع قدر مطلق ۴۳
تابع جزء صحیح ۴۴
خواص جز صحیحها ۴۵
توابع نمایی ۴۶
توابع لگاریتمی ۴۷
برخی از خواص لگاریتمها ۴۷

عنوان **صفحه**

توابع رادیکالی به فرجه زوج ۴۸
توابع رادیکالی به فرجه فرد ۴۹
توابع مثلثاتی ۵۰
نسبتهای مثلثاتی ۵۰
نسبتهای مثلثاتی $۲\pi \pm \theta$ ۵۷
نسبتهای مثلثاتی $\pi \pm \theta$ ۵۸
نسبتهای مثلثاتی $\frac{\pi}{۲} \pm \theta$ ۵۸
نسبتهای مثلثاتی $\frac{۳\pi}{۲} \pm \theta$ ۵۸
تست‌های آخر فصل ۸۴
پاسخ تست‌های آخر فصل ۸۶

فصل سوم: حد و پیوستگی توابع

تعریف پیوستگی ۹۱
قاعده‌های هم ارزی برای حدگیری ۹۲
هم ارزی نیوتن ۹۲
هم ارزی جزء صحیح ها ۹۳
هم ارزی مثلثاتی ۹۳
هم ارزی در Ln ها ۹۳
صور مبهم ۹۴
نکات رفع ابهام در محاسبهٔ حد توابع ۹۷
تست‌های آخر فصل ۱۱۱
پاسخ تست‌های آخر فصل ۱۱۳

فصل چهارم: مشتق و کاربرد مشتق

مشتق تابع پارامتری ۱۲۱
مشتق تابع ضمنی ۱۲۱
مشتق تابع وارون ۱۲۲
محاسبه معادله خط مماس و قائم ۱۲۳
کاربردهای مشتق ۱۲۸
تعریف max و min نسبی ۱۲۹
تعیین تعقر و نقطه عطف ۱۳۰
قاعدهی هوپیتال ۱۳۱
تست‌های آخر فصل ۱۳۷
پاسخ تست‌های آخر فصل ۱۳۹

فصل پنجم: انتگرال

تکنیک‌های انتگرال‌گیری ۱۴۴
روش جز به جز ۱۴۶
روش تجزیه به کسرهای گویا ۱۴۹

عنوان **صفحه**

انتگرال معین ۱۵۱
مشتق‌گیری از انتگرال ۱۵۲
تست‌های آخر فصل ۱۵۴
پاسخ تست‌های آخر فصل ۱۵۶

فصل ششم: اتحادها

معادلات درجه دوم ۱۶۰
دوجمله‌ای نیوتن ۱۶۲

فصل هفتم: آمار توصیفی

میانگین حسابی ۱۶۷
میانگین هندسی ۱۶۸
میانگین هارمونیک ۱۶۸
میانه ۱۶۹
خواص میانه‌ها ۱۷۰
مد یا نما ۱۷۰
چندک‌ها ۱۷۱
چارک‌ها ۱۷۲
دهک‌ها ۱۷۲
صدک‌ها ۱۷۲
شاخص‌های پراکندگی ۱۷۳
گشتاورها ۱۷۶
شاخص‌های نسبی پراکندگی ۱۷۸
چولگی ۱۷۸
ضریب کشیدگی (E) ۱۸۱
ضریب کشیدگی صدکی ۱۸۱
تست‌های آخر فصل ۱۸۲
پاسخ تست‌های آخر فصل ۱۸۴

فصل هشتم: آنالیز ترکیبی

جایگشت‌ها ۱۸۸
خواص ترکیب ۱۹۰
تست‌های آخر فصل ۱۹۳
پاسخ تست‌های آخر فصل ۱۹۴

فصل نهم: احتمالات

تست‌های آخر فصل ۲۰۲
پاسخ تست‌های آخر فصل ۲۰۴

عنوان **صفحه**

فصل دهم: احتمال شرطی

قاعده‌ی احتمال کل ۲۰۹
قاعده بیز ۲۱۰
تست‌های آخر فصل ۲۱۱
پاسخ تست‌های آخر فصل ۲۱۳

فصل یازدهم: متغیرهای تصادفی

متغیر تصادفی ۲۱۷
متغیرهای تصادفی گسسته ۲۱۷
متغیر تصادفی پیوسته ۲۱۸
تابع چگالی احتمالی ۲۱۸
تابع توزیع تجمعی ۲۱۹
امید ریاضی ۲۲۰
واریانس ۲۲۱
انحراف استاندارد (انحراف از معیار) ۲۲۱
تابع مولد گشتاور ۲۲۳
تست‌های آخر فصل ۲۲۴
پاسخ تست‌های آخر فصل ۲۲۶

فصل دوازدهم: کواریانس و ضریب همبستگی

ضریب همبستگی ۲۳۰
تست‌های آخر فصل ۲۳۱
پاسخ تست‌های آخر فصل ۲۳۳

فصل سیزدهم: توزیع احتمال خاص گسسته

توزیع یکنواخت گسسته ۲۳۷
توزیع برنولی ۲۳۸
توزیع دوجمله‌ای ۲۳۸
توزیع پواسون: (Poisson) ۲۳۹
توزیع دوجمله‌ای منفی ۲۴۰
توزیع هندسی ۲۴۱
توزیع فوق هندسی ۲۴۲
تست‌های آخر فصل ۲۴۴
پاسخ تست‌های آخر فصل ۲۴۶

فصل چهاردهم: توزیع‌های احتمال خاص پیوسته

توزیع یکنواخت ۲۴۹
توزیع نرمال ۲۵۰
توزیع نرمال استاندارد ۲۵۰
توزیع نمایی ۲۵۲

عنوان **صفحه**

توزیع بتا (β)..... ۲۵۲
توزیع مربع کای دو χ^2_ν: (خی‌دو)..... ۲۵۳
تست‌های آخر فصل..... ۲۵۴
پاسخ تست‌های آخر فصل..... ۲۵۶

فصل پانزدهم: رگرسیون و همبستگی

رگرسیون..... ۲۵۹
رگرسیون خطی..... ۲۶۰
تست‌های آخر فصل..... ۲۶۲
پاسخ تست‌های آخر فصل..... ۲۶۴

فصل شانزدهم: جبر خطی

منابع و مآخذ..... ۲۸۹

فصل اول

نظریه مجموعه‌ها

عناوین اصلی

- تعریف مجموعه‌ها
- جبر مجموعه‌ها
- عدد اصلی مجموعه‌ها
- افراز یک مجموعه

فصل اول

نظریه مجموعه‌ها

تعریف مجموعه

هر دسته از عناصر که در کنار هم قرار گرفته باشند به طوری که متعلق بودن یا نبودن عنصری به این دسته مشخص باشد را مجموعه گوییم. حال به چندی از آنها اشاره می‌کنیم.

مثال

مجموعه دانشجویان رشته مدیریت
مجموعه دانشجویان رشته حسابداری
مجموعه اعداد اول
مجموعه دانشجویان رشته های علوم انسانی
همه این دسته ها مجموعه هستند.

تعریف تعلق داشتن

هر عنصری که متعلق به یک مجموعه باشد را عضو آن مجموعه گوییم و آن عنصر را متعلق به آن مجموعه می‌گوییم. اگرعنصرx به مجموعه A متعلق باشد آن را با $x \in A$ نمایش می‌دهیم.

در زیر با تعدادی از مجموعه های شاخص آن آشنا می‌شویم.

$\mathbb{N} = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,...\}$ = مجموعه اعداد طبیعی

$W = \{۰,۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,...\}$ = مجموعه اعداد حسابی

$\mathbb{Z} = \{...,-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,...\}$ = مجموعه اعداد صحیح

$Q = \left\{ \frac{a}{b} \middle| \ a \in \mathbb{Z} \ , \ b \in \mathbb{Z}, b \neq ۰ \right\}$ = مجموعه اعداد گویا

$Q^c = R - Q =$ مجموعه اعداد گنگ (اصم)

$\mathbb{R} = Q \cup Q^c =$ مجموعه اعداد حقیقی $= (-\infty, +\infty)$

$\mathbb{R}^+ =$ مجموعه اعداد حقیقی مثبت $= (۰, +\infty)$

$\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ = مجموعه اعداد حقیقی نامنفی $= [0, +\infty)$

$\mathbb{R}^-$ = مجموعه اعداد حقیقی منفی $= (-\infty, 0)$

$R^- \cup \{0\}$ = مجموعه اعداد حقیقی نامثبت $= (-\infty, 0]$

مجموعه ها را به فرمهای مختلفی نمایش می‌دهیم. یکی به فرم نمایش اعضاء، مثلاً مجموعه A را به فرم $A = \{-2, 0, 2\}$ نمایش می‌دهیم. یا به فرم ضابطه ای به فرم $A = \{x \mid x^3 - 4x = 0\}$ می‌توان نمایش داد.

مجموعه تهی مجموعه ای است که دارای عضو نباشد. مجموعه تهی را به فرمهای متفاوتی از جمله فرمهای زیر می‌توان نمایش داد:

$$\phi = \{\ \} = \{x \mid x \neq x\} = \{x \mid x^2 < 0\} = \ldots$$

تذکر: توجه داشته باشید که مجموعهٔ $\{\phi\}$ و همچنین $\{0\}$ تهی نیستند.

اگر هر عضو در مجموعه A، در مجموعه B نیز باشد آن گاه A را زیرمجموعه B می گوییم و آن را به فرم $A \subseteq B$ نمایش می‌دهیم.

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x \in A \Rightarrow x \in B)$$

و $B \subseteq A \Leftrightarrow (\forall x \in B \Rightarrow x \in A)$

دو مجموعه A و B برابر است اگر و تنها اگر A زیرمجموعه B و مجموعه B، زیرمجموعه A باشد.

$$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B, B \subseteq A)$$

A را زیرمجموعه محض B گوییم هرگاه $A \subseteq B$ و $A \neq B$ باشد. A را به عنوان زیرمجموعه محض B به فرم $A \subset B$ نمایش می‌دهیم، به عبارت دیگر زیرمجموعهٔ محض B یعنی زیرمجموعه ای از B که همه‌ی عضوهای B را ندارد.

تمام زیرمجموعه های یک مجموعه را در مجموعه ای به نام مجموعهٔ توانی جمع آوری می‌کنند و آن را با $P(A)$ نمایش می‌دهیم.

مثال

زیرمجموعه های $A = \{1, 2, 3\}$ را بنویسید و تعداد آن را بیابید؟

$$P(A) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, A\}$$

$$|P(A)| = 8$$

تذکر: تعداد زیرمجموعه های مجموعهٔ n عضوی به فرم 2^n می‌باشد. به عنوان مثال برای مجموعهٔ ۳ عضوی بالا $8 = 2^3$ زیرمجموعه وجود دارد.

زیرمجموعه بودن خاصیت تراگذری یا تعدی دارد.

به عبارت دیگر برای سه مجموعه دلخواه A و B و C داریم:

$$A \subseteq B \quad , \quad B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$$

همچنین تهی زیر مجموعه هر مجموعه ای از جمله تهی می‌باشد.

به عبارت دیگر به ازای هر مجموعهٔ A داریم: $\phi \subseteq A$

همچنین هر مجموعه ای زیرمجموعه خودش است.

به عبارت دیگر به ازای هر مجموعه ای مانند A داریم: $A \subseteq A$

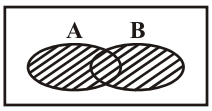
اعمال روی مجموعه ها را با اتحاد بین دو مجموعه توضیح می‌دهیم.

اجتماع دو مجموعه: دو مجموعه A وB را در نظر بگیرید. اجتماع دو مجموعه A وB عبارت است از همه عضوهای هم A و هم B . اجتماع A وB را با $A \cup B$ نمایش می‌دهیم.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ یا } x \in B\}$$

به عبارت دیگر به ازای هر عنصر متعلق به $A \cup B$ داریم:

$$\forall x \in A \cup B \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ \text{یا } x \in B \end{cases}$$

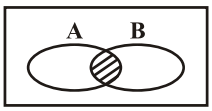


اشتراک دو مجموعه: دو مجموعهA وB را در نظر بگیرید. اشتراک دو مجموعه A وB عبارت است از عضوهای مشترک دو مجموعه A وB .

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \ , \ x \in B\}$$

به عبارت دیگر به ازای هر عضو متعلق به $A \cap B$ داریم:

$$\forall x = A \cap B \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ , \ x \in B \end{cases}$$



دو مجموعه A وB را ناسازگار گوییم هرگاه $A \cap B = \phi$ باشد.

به دو مجموعه ناسازگارA وB، دو مجموعهٔ جدا از هم گوییم.

مجموعه جهانی (مجموعه مرجع) که به فرم M یا به فرم U نشان می‌دهیم، عبارت است از مستطیلی که مجموعه‌های دیگر را درون آن در نظر می‌گیریم. مجموعه جهانی یا مرجع را به عنوان یک مجموعه ای کامل مانند مجموعهٔ $\mathbb{R}$ در نظر می‌گیریم.

متمم یک مجموعه مانندA که آن را به فرم A' یا A^C یا $U - A$ نیز نمایش می‌دهیم، عبارت است از مجموعه مرجع به جز مجموعه A .

در نمودار ون روبرو A' را نمایش داده ایم:

$$A' = \{x \mid x \in U, x \notin A\}$$



مجموعه متمم A

بنابه قوانین دمورگان داریم:

الف) $(A\cup B)' = A'\cap B'$

ب) $(A\cap B)' = A'\cup B'$

همچنین بنا به قوانین شرکت پذیری داریم:

الف) $A\cup(B\cup C) = (A\cup B)\cup C$ خاصیت شرکت پذیری در عمل اجتماع

ب) $A\cap(B\cap C) = (A\cap B)\cap C$ خاصیت شرکت پذیری در عمل اشتراک

اگر از مجموعه دو بار متمم گیری کنیم مجموعه حاصل همان مجموعه اولیه خواهد بود به بیان دیگر $(A')' = A$

اگر $A\subseteq B$ اگر و فقط اگر $A\cup B = B$ و $A\cap B = A$

خاصیت جابجایی در عمل اجتماع و اشتراک

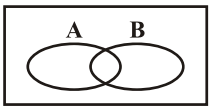
$$A\cup B = B\cup A$$

$$A\cap B = B\cap A$$

تفاضل B از A که آن را به فرم $A-B$ می‌نویسیم به فرم $A\cap B'$ نیز تعریف می‌شود.

همچنین می‌توان از عبارت $A-(A\cap B)$ نیز به جای آن استفاده کرد.

$$A-B = A\cap B' = A-(A\cap B) = \{x \mid x\in A, x\notin B\}$$



اگر که $A\subseteq C$ باشد یعنی همه عضوهای مجموعه A در داخل مجموعه C نیز باشد.و همچنین $B\subseteq C$ باشد یعنی همه عضوهای مجموعه B در داخل مجموعهC باشد. آنگاه $A\cup B\subseteq C$

قوانین متمم گیری عبارت است از:

$$A\cup A' = U$$

$$A\cap A' = \phi$$

یعنی اجتماع مجموعهA و مجموعه متممA، مجموعه جهانی (مرجع) می‌نامند.

اشتراک مجموعهA و مجموعه متممA، مجموعه تهی می‌نامند.

اگرA زیرمجموعه B باشد اگر و فقط اگر که تفاضل B ازA تهی است.

$$A\subseteq B \Leftrightarrow A-B = \phi$$

همچنین $A-\phi = A$ و $\phi - A = \phi$ می‌باشد.

بنا به خاصیت پخشی اجتماع نسبت به اشتراک و همچنین خاصیت پخشی اشتراک نسبت به اجتماع می‌توان نوشت:

$$A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$$

$$A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$$

اگر $A\subseteq B$ باشد آنگاه می‌توان از طرفین رابطه یک مجموعه مانندC را برداشت به عنوان مثال $A-C\subseteq B-C$

اگر $A \subseteq B$ باشد می‌توان با متمم گیری $B' \subseteq A'$ را نیز نتیجه گرفت.

همچنین عبارت $(A-B)'$ را می‌توان به فرم $B-A$ نیز نمایش داد.

$$(A-B)' = (A \cap B')' = A' \cup B = B - A$$

حاصلضرب دکارتی دو مجموعه A و B که آن را به فرم $A \times B$ یا $B \times A$ می‌نویسیم به فرم زیر تعریف می‌شود:

$$\left.\begin{aligned} A \times B &= \{(x,y) \mid x \in A, y \in B\} \\ B \times A &= \{(x,y) \mid x \in B, y \in A\} \end{aligned}\right\} \Rightarrow A \times B \neq B \times A$$

زوج مرتب (x,y) را بنا به مبانی ریاضیات می‌توان به فرم $(a,b) = \{\{a\},\{a,b\}\}$ نیز نمایش داد.

تذکر: توجه داشته باشید که اگر $A = B$ (مجموعه A و B با هم برابر باشد) اگر و فقط اگر که حاصل ضرب دکارتی $B \times A = A \times B$

به عبارت دیگر فقط زمانی ضرب دکارتی خاصیت جابجایی دارد که مجموعه A, B با هم برابر باشد در غیر اینصورت دو مجموعه $A \times B \neq B \times A$ ۵)

همچنین حاصل ضرب دکارتی نسبت به اجتماع خاصیت توزیع پذیری دارد.

اگر A و B و C سه مجموعهٔ دلخواه باشند.

۱۱) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

توجه داشته باشید که حاصل ضرب دکارتی خاصیت شرکت پذیری ندارد یعنی به ازای سه مجموعهٔ ناتهی A و B و C

$$(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$$

حاصل ضرب دکارتی نسبت به اشتراک خاصیت توزیع پذیری دارد. یعنی اگر A و B و C سه مجموعهٔ دلخواه باشند.

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

همچنین n تایی مرتب $(x_1, x_2, ..., x_n)$ با n تایی مرتب $(y_1, y_2, ..., y_n)$ با هم برابر است اگر و تنها اگر مختصاتهای نظیر به نظیرشان با هم برابر باشد به عبارت دیگر:

$$(x_1, x_2, ..., x_n) = (y_1, y_2, ..., y_n) \Leftrightarrow x_1 = y_1, x_2 = y_2, ..., x_n = y_n$$

همچنین دو اتحاد زیر را نیز به خاطر بسپارید:

$$(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$$

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$$

و یکی دیگر از مباحث بسیار مهم زیرمجموعه هایی شاخص از مجموعهٔ اعداد حقیقی $(\mathbb{R})$ می‌باشد که به آنها اشاره می‌کنیم.

$[a,b] = \{a \le x \le b \; ; \; x \in \mathbb{R}\} =$ بازه بستهٔ A تا B

$[a,b) = \{x \mid a \le x < b \; ; \; x \in \mathbb{R}\} =$ بازهٔ بسته a تا باز b

$(a,b] = \{x \mid a < x \le b \; ; \; x \in \mathbb{R}\} =$ بازه بازa تا بسته b

$(a,b) = \{x \mid a < x < b \; ; \; x \in \mathbb{R}\} =$ بازه باز a تا b

مثال

مجموعهٔ $A=\{-۱,۰,۱\}$ و $B=\{۲,۳\}$ می‌باشد. $A\times B$ و $B\times A$ را نوشته و با هم مقایسه کنید؟

حل:

$$A\times B=\left\{(x,y)\middle|\begin{matrix}x\in A\\ y\in B\end{matrix}\right\}=\{(-۱,۲),(-۱,۳),(۰,۲),(۰,۳),(۱,۲),(۱,۳)\}$$

$$B\times A=\left\{(x,y)\middle|\begin{matrix}x\in B\\ y\in A\end{matrix}\right\}=\{(۲,-۱),(۲,۰),(۲,۱),(۳,-۱),(۳,۰),(۳,۱)\}$$

$$A\times B\neq B\times A$$

مثال

اگر e عدد نپری باشد مطلوب است محاسبهٔ $\{e\}'$ و $[۵,۱۲]'$ و $(۳,۵)\cup(۴,۹)$ و $(۵,۳)'$ و $(۰,۲)\cap(\frac{۱}{۲},۳)$ را بیابید؟

حل:

$$\{e\}'=\mathbb{R}-\{e\}=(-\infty,e)\cup(e,+\infty)$$

$$[۵,۱۲]'=\mathbb{R}-(۵,۱۲)=(-\infty,۵)\cup(۱۲,+\infty)$$

$$(۳,۵)\cup(۴,۹)=(\min\{۳,۴\},\max\{۵,۹\})=(۳,۹)$$

$$(۰/۲)\cap\left(\frac{۱}{۲},۳\right)=\left(\max\left\{۰,\frac{۱}{۲}\right\},\min\{۲,۳\}\right)=\left(\frac{۱}{۲},۲\right)$$

بازه بی معنی است زیرا در بازه ها بایستی عدد سمت چپ بازه یعنی ۵ کوچکتر از عدد سمت راست بازه یعنی ۳ باشد. لذا متمم نیز ندارد.

مثال

چه فرقی بین بازه (۵و۳) و مختصات نقطه ای (۵و۳) وجود دارد؟

حل: بازه (۵ و۳) یعنی اعدادی که بین ۳ و ۵ قرار دارند. در حالیکه نقطهٔ (۵ و۳) یعنی مختصات نقطه ای که دارای طول ۳ و عرض ۵ در مختصات $R^۲$ دارد. بنابراین این دو با هم برابر نیستند و اساساً ربطی به هم ندارند.

مثال

مجموعه $(A\cap B)\cap(A-B)'$ کدام است؟

۱) A ۲) B ۳) $A\cap B$ ۴) $A\cup B$

حل: گزینه ۳ درست است.

$$(A\cap B)\cap(A-B)'=(A\cap B)\cap(A\cap B')'=(A\cap B)\cap(A'\cup B)$$

$$=(A\cap B\cap A')\cup(A\cap B\cap B)=((A\cap A')\cap B)\cup(A\cap B)$$

$$=(\phi\cap B)\cup(A\cap B)=\phi\cup(A\cap B)=A\cap B$$

مثال

اگر به مجموعه A دو عضو اضافه شود، تعداد زیر مجموعه آن چند برابر می‌شود؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۸

حل: گزینه ۳ درست است.

اگر به استقرای ریاضی عمل کنیم می‌بینیم که چنانچه مجموعه تهی را در نظر بگیریم $۲^{۰}=۱$ زیرمجموعه دارد. اگر مجموعه‌ای تک عضوی باشد $۲^{۱}=۲$ زیرمجموعه دارد و اگر مجموعه دو عضوی باشد $۲^{۲}=۴$ زیرمجموعه دارد و اگر مجموعه سه عضوی باشد $۲^{۳}=۸$ و همینطور الی آخر. حال اگر این اعداد را به فرم دنباله نمایش دهیم، خواهیم داشت:

$$۱,۲,۴,۸,۱۶,۳۲,۶۴,۱۲۸,۲۵۶,۵۱۲,۱۰۲۴,...$$

ملاحظه می‌شود دنباله هندسی با قدر نسبت دو به وجود آمده است یعنی هر عضو تعداد زیرمجموعه ها را دو برابر می‌کند و چون دو عضو اضافه شده پس تعداد زیرمجموعه ها ۴ برابر می‌شود.

مجموعه‌ها

عدد اصلی مجموعه (کاردینال)

چنان چه تعداد اعضای یک مجموعه‌ای مانندA متناهی باشد، عدد اصلی مجموعه‌ی A همان تعداد عضوهای مجموعه‌ی A می‌باشد و با n(A) نمایش می‌دهیم

برای محاسبه‌ی مسائل نظریه مجموعه‌ها می‌توان از فرمول‌های زیر استفاده کرد:

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

توضیح: یعنی مجموعه تعداد عضوهای مجموعه‌ی B,A را می شمریم. چنان چه اشتراکی بین دو مجموعه موجود باشد، تعداد عضوهای اشتراک دوبار شمرده شده است.

یک بار تعداد عضوهای اشتراک را از مجموع اعضای مجموعه‌ی B,A کم می‌کنیم تا تعداد عضوهای A اجتماعB که تلفیقی از اعضای دو مجموعه‌یB,A است پدید آید.

$$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$$

توضیح: تعداد اعضای مجموعه‌ی A-B یعنی تعداد عضوهای مجموعه‌یA به جز تعداد اعضای اشتراک آن دو مجموعه B,A

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$$

توضیح: چنان چه بخواهد تعداد اعضای اجتماع سه مجموعه‌ی C,B,A را بدست آورده مجموع تعداد عضوهای A و B و C را از اشتراک دو به دو آن‌ها کم می‌کنیم سپس اشتراک سه تاییC,B,A را به آن اضافه کنیم.

مثال

چنان چه اعضای مجموعه B,A به فرم زیر باشند، مطلوب است محاسبه‌ی تعداد اعضای A اجتماع B؟

$$A=\{۱,۲\} \qquad B=\{۵,۱\}$$

حل:

برای محاسبه‌ی تعداد اعضای $A\cup B$ تعداد عضوهای B,A و اشتراک B,A را می‌یابیم.

۲= تعداد عضوهای مجموعه $A = \{۱,۲\} \Rightarrow n(A) = A$

۲= تعداد عضوهای مجموعه $B = \{۵,۱\} \Rightarrow n(B) = B$

۱= تعداد عضوهای اشتراک A با $A \cap B = \{۱\} \Rightarrow n(A \cap B) = B$

لذا $n(A \cup B)$ برابر است با $۲+۲-۱=۳$

مثال

چنان چه B,A دو زیر مجموعه از مجموعه مرجع M باشند به طوری که $n(A') = ۳۰, n, (A \cap B) = ۲۵, n(B) = ۵۰$ **باشد. آن گاه بنا به قاعده دمورگان مطلوب است تعیین** $n(M) = ۱۰۰$ ؟ $n(A' \cap B')$

حل: بنا به قاعده مورگان داریم:

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$\Rightarrow n(A' \cap B') = n(A \cup B)' = n(M) - (A \cup B) = ۱۰۰ - ۹۵ = ۵$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = ۷۰ + ۵۰ - ۲۵ = ۹۵$$

$$n(A') = n(M) - n(A) = ۱۰۰ - ۳۰ = ۷۰$$

تفاضل متقارن دو مجموعه

تفاضل متقارن دو مجموعه B,A که آن را با $A\Delta B$ نشان می‌دهیم، مجموعه ای که اعضای آن یا منحصرا متعلق به مجموعهA می‌باشد و در B نیست یا در مجموعه B می‌باشد و در A نیست.

$$A\Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

ویژگی تفاضل متقارن عبارتند از:

۱) $A\Delta B = \phi$

توضیح ۱) $A\Delta A = (A - A) \cup (A - A) = \phi \cup \phi = \phi$

۲) $A\Delta M = A'$

توضیح ۲) $A\Delta M = (A - M) \cup (M - A) = \phi \cup A' = A'$

چون $\phi \subseteq A'$ می‌باشد لذا $\phi \cup A' = A'$

۳) $A\Delta\phi = A$

توضیح ۳) $A\Delta\phi = (A - \phi) \cup (\phi - A) = A \cup \phi = A$

۴) $A\Delta B = B\Delta A$

توضیح ۴) $A\Delta B = (A - B) \cup (B - A) = (B - A) \cup (A - B) = B\Delta A$

۵) $A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$

توضیح ۵ مشابه توزیع ۴ می‌باشد.

۶) $A\Delta A' = M$

توضیح۶) $A\Delta A' = (A - A') \cup (A' - A) = A \cup A' = M$

۷) $A\Delta B = A\Delta C \Rightarrow A = B$

توضیح ۷) $A\Delta B = A\Delta C \Rightarrow (A - B) \cup (B - A) = (A - C) \cup (C - A) \Rightarrow B = A$

۸) $A\Delta B = \phi \quad \Rightarrow A = B$

توضیح ۸) $A\Delta B = \phi \Rightarrow (A - B) \cup (B - A) = \phi \Rightarrow \begin{cases} A - B = \phi \\ B - A = \phi \end{cases} \Rightarrow A = B$

۹) $A \subset B \Rightarrow A\Delta B = B - A$

توضیح۹) $A\Delta B = (A - B) \cup (B - A) = (\phi) \cup (B - A) = B - A$

$A \subset B \Rightarrow A - B = \phi$

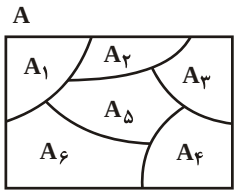
افراز یک مجموعه

چنان‌چه مجموعه‌ای همانند A را چنان در نظر بگیریم به طوری که آن را به زیر مجموعه‌های کوچک‌تر تقسیم‌بندی کنیم آن گاه A را افزا شده توسط مجموعه‌های $A_n, \cdots, A_2, A_1$ گوییم هرگاه:

۱) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = A$

۲) $A_i \cap A_j = \phi; i \neq j$

۳) $A_i = \phi; i = 1, 2, \cdots, n$



مثال

کلیه افرازهای مجموعه $A = \{a, b, c\}$ را بیابید که در آن a وb وc سه عدد حقیقی هستند.

حل: یکی از افرازهای A $\{a\}, \{b\}, \{c\}$

یک از افرازهای دیگر A $\{a\}, \{b, c\}$

دیگری $\{b\}, \{a, c\}$

و دیگری $\{c\}, \{a, b\}$

و در آخر $\{a, b, c\} = A$

مجموعا پنج افراز مجموعه‌ی A می‌باشد.

به خاطر داشته باشید که تعداد افرازهای مجموعه‌ی n عضوی A طبق جدول عبارت است از

تعداد عضوهای مجموعه‌ی A	۱	۲	۳	۴	۵
تعداد افراز مجموعه‌ی A	۱	۲	۵	۱۵	۵۲

چنانچه $A\times B$, $B\times A$ را داشته باشیم آن گاه:

$$n(A\times B)=n(A)\times n(B)$$

$$n\left[(A\times B)\cup(B\times A)\right]=۲n(A)n(B)-\left[n(A\cap B)\right]^{۲}$$

$$n\left[(A\times B)-(B\times A)\right]=n(A).n(B)-\left[n(A\cap B)\right]^{۲}$$

تذکر: همچنین توجه داشته باشید که $n\left[(B\times A)-(A\times B)\right]=n\left[(A\times B)-(B\times A)\right]$

مثال

چنان چه دو مجموعه‌ی $A=\{-۱,۰,۱\},B=\{۰,۱,۲,۳\}$ را داشته باشیم مطلوب است.

الف) تعداد $A\times B$

ب) تعداد $(A\times B)\cup(B\times A)$

ج) تعداد $(A\times B)\cap(B\times A)$

د) تعداد $(A\times B)-(B\times A)$

حل الف:

$$n(A\times B)=۳\times ۴=۱۲$$

$$n(A)=۳,n(B)=۴,A\cap B=\{۰,۱\}\Rightarrow n(A\cap B)=۲$$

حل ب:

$$n\left[(A\times B)\cup(B\times A)\right]=۲(۳)(۴)-(۲)^{۲}=۲۰$$

حل ج:

$$n\left[(A\times B)\cap(B\times A)\right]=(۲)^{۲}=۴$$

حل د:

$$n\left[(A\times B)-(B\times A)\right]=(۳)(۴)-(۲)^{۲}=۸$$

عمل ضرب دکارتی روی اجتماع، اشتراک و تفاضل از سمت راست و از سمت چپ توزیع پذیر است.

$$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$$

$$(B\cup C)\times A=(B\cup A)\cup(C\times A)$$

$$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$$

$$(B\cap C)\times A=(B\times A)\cap(C\times A)$$

$$A\times(B-C)=(A\times B)-(A\times C)$$

$$(B-C)\times A=(B\times A)-(C\times A)$$

چنانچه زوج مرتبی مانند (a,b) متعلق به حاصل ضرب دکارتی $A\times B$ نباشد یا مولفه اول آن، a به مجموعه A تعلق ندارد یا مولفه دوم آن، b به مجموعه B تعلق ندارد و یا مولفه‌ی b,a هیچ کدام به مجموعه B,A تعلق ندارد.

$$a\notin A \quad , \quad b\notin B$$

به عبارت دیگر:

$$(a,b)\in A\times B\Leftrightarrow\begin{cases}a\notin A, b\in B\\ a\in A, b\notin B\\ a\notin A, b\notin B\end{cases}$$