

دانش اگر در ثریا هم باشد مردمانی از سرزمین پارس بر آن دست خواهند یافت.

پیامبر اعظم (ص)

شرح جامع

آمار و احتمالات مهندسی

«فنی و مهندسی – علوم پایه»

مولف: محمد بخشایشی بایگی

انتشارات ارشد

پیشگفتار ناشر

خداوند بزرگ را شاکریم که فرصتی عنایت فرمود تا بتوانیم قدمی در جهت گسترش علم و فرهنگ کشور عزیزمان برداریم و مسیری هموار را در اختیار مخاطبان و داوطلبان علاقمند به ادامه تحصیل قرار دهیم. از آنجائی که درحوزه کتاب‌های درسی و کمک درسی کارشناسی ارشد کتاب‌های زیادی به رشته تحریر در آمده است با این حال وجود یک مجموعه جامع، دقیق، کامل و دارای رفرنس(منابع) مستند احساس می‌شود.

همیشه دغدغه داشتیم که ای کاش می‌شد تمامی منابع پراکنده و گاهاً دست نایافتنی کنکور در یک مجموعه به گونه‌ای جذاب و شیوا آماده می‌شد و همچنین سوالات دوره‌های قبل کنکور نیز به گونه‌ای تشریحی پاسخ داده می شدند، که خدشه‌ای بر آنها وارد نشود و خیال داوطلبان عزیز آنقدر آسوده باشد که اطلاعات مندرج در پاسخنامه‌ها را برای بهره‌گیری در آزمون خود بکار گیرند. این کار با یاری خداوند بزرگ و همکاری نخبه‌ترین دانشجویان و اساتید کشور در انتشارات ارشد هماهنگ گردید و در تمامی مقاطع تحصیلی از کاردانی به کارشناسی، کارشناسی ارشد و دکتری در حوزهٔ آزمون‌های سراسری – آزاد و پیام نور بسته‌های آموزشی که شامل کتاب‌های بانک سوالات و کتاب‌های شرح جامع درس آماده گردید. در تهیه مجموعه‌های فوق‌الذکر از فارغ‌التحصیلان کارشناسی ارشد که حائز رتبه‌های تک رقمی کنکور می‌باشند، استفاده کرده‌ایم، تا شما عزیزان بتوانید در راستای افزایش توان علمی خود در جهت نیل به مقصود خویش نایل آیید. بدون تردید می‌توان گفت که برای اولین بار در نظام آموزشی کشور مجموعه‌ای به این سبک عرضه می‌شود که در کیفیت و کمیت بی‌نظیر بوده و تمامی نیازهای داوطلبان عزیز را پوشش داده است. امید است که استفاده از این مجموعه عزیزان را در جهت موفقیت در آزمون یاری رسانده باشد. در پایان لازم به ذکر است که بی نقصی محض از آن خداوند متعال می‌باشد، بنا براین از تمامی خوانندگان و داوطلبان عزیز خواهشمندیم نظرات سازنده خود را در مورد این کتاب به سایت انتشارات ارشد اعلام نمایند تا ما را در جهت هر چه بهتر آماده کردن این محصولات یاری رسانند.

با تشکر

ناشـــــر

www.arshadbook. ir

تقدیم به روح پدر بزرگوارم :

احمد بخشایشی بایگی

و

مادر مهربانم

پیشگفتار مولف

زندگی صحنه یکتای هنرمندی‌هاست
هرکسی نغمه خود خواند و از صحنه رود
صحنه پیوسته بجاست
خرم آن نغمه که مردم بسپارند به یاد

اینک که مجالی در پهنه فارخ این عالم دست داد تا شاید بتوانیم گرهی از بیشمار گره بشریت بگشاییم کوشیده‌ایم تا اثری جاودانه بر جای گذاریم مگر مورد عنایت خداوند بخشاینده قرار گیریم.
در این کتاب که شرح کاملی بر آمار و احتمال مهندسی صنایع است سعی شده است که جامعیت در کنار کیفیت بالا به دانشجویان کوشا و جویای علم و دانش و مخصوصا داوطلبان شرکت در کنکور تقدیم گردد. در متن هر درس علاوه به رجوع به مفاهیم، نکات فراوانی گفته شده و سپس در تست های تالیفی انتهای هر فصل با ارائه تمرین هایی درک مفاهیم متن درس را تسهیل بخشیده ایم همچنین در انتها نیز سری به پاره ای از تست های کنکور سال های گذشته زده‌ایم تا خواننده در کنار فهم عمیق با سوالات متداول سالهای قبل آشنا شود. اما از آن‌جایی که هیچ دستاورد بشری عاری از نقص نیست امید است خوانندگان ارجمند با فضل و کرم‌شان کوتاهی های سهوی را بر ما ببخشند و در جهت رفع اشکالات احتمالی ما را از پیشنهادات و انتقادات خود بی‌بهره نگذارند تا در چاپهای بعدی مجموعه‌ای نفیس تر ارائه گردد.

در اینجا می‌خواهم از تمام کسانی که به هر نحوی این بنده ناتوان را در تهیه این کتاب یاری کردند تشکر کنم. در ابتدا از اساتید بزرگوار دانشکده مهندسی صنایع دانشگاه صنعتی امیرکبیر آقایان دکتر امین نیری و احمدی جاوید در کنار استاد عالیقدر آقای دکتر زنجیرانی فراهانی که رهنمودهای بی‌نهایت راهگشایشان چراغ راه بود سپاسگذاری کنم. از واحد انتشارات ارشد که با صبر و پایداری اقدام به ارائه این مجموعه کردند نیز بی نهایت قدردانی کرده همچنین از تمامی دوستان دلسوزم در دانشگاه امیرکبیر که همواره مشوقان بی‌نظیر بودند کمال امنتان را دارم. در پایان آرزوی موفقیت و بهروزی برای تمامی خوانندگان گرامی دارم.

محمد بخشایشی بایگی
m.Bakhsayeshi@yahoo.com

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

پیشگفتار ناشر ۳
پیشگفتار مؤلف ۵

فصل اول: آنالیز ترکیبی

۱-۱- مقدمه ۱۵
۱-۲- اصل اساسی شمارش ۱۵
۱-۳- جایگشت‌ها ۱۶
۱-۴- ترتیب عناصر ۱۶
۱-۵- ترکیب ۱۸
۱-۶- تعداد جواب‌های صحیح معادلات ۲۰
خلاصه فصل ۲۲
تست‌های تألیفی ۲۶

فصل دوم: اصول احتمال

۲-۱- مقدمه ۳۳
۲-۲- آزمایش تصادفی، فضای نمونه و پیشامد ۳۳
۲-۲-۱- جبر مجموعه‌ها ۳۳
۲-۳- احتمال ۳۴
تست‌های تألیفی ۴۰
تست‌های فصل دوم ۵۶
پاسخنامه تست‌های فصل دوم ۵۸

فصل سوم: احتمال شرطی و استقلال

۳-۱- مقدمه ۶۳
۳-۲- احتمال شرطی چیست؟ ۶۳
۳-۳- قضیه احتمال کل و فرمول بیز ۶۵
۳-۳-۱- قانون بیز ۶۶
۳-۴- استقلال پیشامدها ۶۶
۳-۵- $P(\cdot / F)$ به عنوان یک تابع احتمال ۶۸
خلاصه فصل ۷۱
تست‌های تألیفی ۷۲
تست‌های فصل سوم ۸۱
پاسخ‌نامه فصل سوم ۸۴

فصل چهارم: متغیر تصادفی

۴-۱- مقدمه ۹۱
۴-۲- متغیر تصادفی ۹۱

عنوان صفحه

۴-۳- متغیرهای تصادفی گسسته ۹۳
۴-۴- امید ریاضی ۹۴
۴-۵- واریانس ۹۵
۴-۶- متغیر تصادفی برنولی ۹۶
۴-۷- متغیر تصادفی دو جمله ۹۷
۴-۸- متغیر تصادفی پواسون ۹۷
۴-۹- متغیر تصادفی هندسی ۹۹
۴-۱۰- متغیر تصادفی دو جمله‌ای منفی ۱۰۰
۴-۱۱- متغیر تصادفی فوق هندسی ۱۰۰
۴-۱۲- متغیر تصادفی یکنواخت گسسته ۱۰۱
۴-۱۳- متغیر تصادفی پیوسته ۱۰۱
۴-۱۴- خصوصیات تابع توزیع تجمعی ۱۰۱
خلاصه فصل ۱۰۲
تست‌های تألیفی ۱۰۳
تست‌های فصل چهارم ۱۱۳
پاسخنامه فصل چهارم ۱۱۷

فصل پنجم: متغیر تصادفی پیوسته

۵-۱- مقدمه ۱۲۷
۵-۲- امید ریاضی و واریانس متغیر تصادفی پیوسته ۱۲۸
۵-۳- توابع توزیع خاص (پیوسته) ۱۲۸
۵-۳-۱- متغیر تصادفی یکنواخت ۱۲۸
۵-۳-۲- متغیر تصادفی نرمال ۱۲۹
۵-۳-۳- متغیر تصادفی گاما ۱۳۰
۵-۳-۴- متغیر تصادفی بتا ۱۳۱
۵-۳-۵-توزیع وایبول ۱۳۱
۵-۳-۶-تابع توزیع کوشی ۱۳۲
۵-۴-گشتاورها ۱۳۲
۵-۵-تعاریف و قضایای مهم دیگر ۱۳۳
۵-۵-۱- قضیه چبیشف ۱۳۳
۵-۵-۲- قضیه مارکف ۱۳۴
۵-۵-۳- چولگی ۱۳۴
۵-۵-۴- کشیدگی یا تیزی ۱۳۴
۵-۵-۵- قانون اعداد بزرگ ۱۳۵
۵-۵-۶- قضیه حد مرکزی ۱۳۵
خلاصه فصل ۱۳۷
تست‌های تألیفی ۱۳۹
تست‌های فصل پنجم ۱۵۱
پاسخنامه تست‌های فصل پنجم ۱۵۵

عنوان **صفحه**

فصل ششم: متغیرهای تصادفی با توزیع توأم

۶-۱- مقدمه ۱۶۵
۶-۲- توابع توزیع توأم ۱۶۵
۶-۳- استقلال متغیرهای تصادفی ۱۶۷
۶-۴- توزیع‌های شرطی: حالت گسسته ۱۶۹
۶-۵- توزیع شرطی: حالت پیوسته ۱۷۰
۶-۶- توزیع‌های نه تواماً پیوسته نه توأماً گسسته ۱۷۰
۶-۷- آماره‌ها ترتیبی ۱۷۰
۶-۸- توزیع توأم توابعی از متغیرهای تصادفی ۱۷۱
خلاصه فصل ۱۷۲
تست‌های تألیفی ۱۷۳
تست‌های فصل ششم ۱۸۱
پاسخنامه تست‌های فصل ششم ۱۸۳

فصل هفتم : خواص امید ریاضی

۷-۱- خواص امید ریاضی ۱۸۹
۷-۲- تابع مولد گشتاور (تولید کننده گشتاور) ۱۹۱
۷-۲-۱- تابع مولد گشتاور توأم ۱۹۱
خلاصه فصل ۱۹۶
تست‌های فصل هفتم ۱۹۷
پاسخنامه تست‌های فصل هفتم ۲۰۰

فصل هشتم : آمار توصیفی

۸-۱- مقدمه ۲۰۷
۸-۲- توصیف داده‌ها ۲۰۷
۸-۲-۱- شاخص‌های مرکزی ۲۰۷
۸-۲-۱-۱- میانگین حسابی ۲۰۸
۸-۲-۱-۲- میانگین هارمونیک: ۲۰۸
۸-۱-۳- میانگین هندسی ۲۰۸
۸-۲-۱-۴- میانه ۲۰۹
۸-۲-۱-۵ مد(نما) ۲۰۹
۸-۲-۱-۶ چندک ۲۱۰
نحوه‌ی محاسبه چندک‌ها: ۲۱۰
۸-۲-۲- شاخص‌های پراکندگی ۲۱۰
۸-۲-۲-۱- واریانس ۲۱۰
۸-۲-۲-۲- انحراف معیار ۲۱۱
۸-۲-۲-۳- دامنه تغییرات ۲۱۱
۸-۲-۲-۴- ضریب تغییرات ۲۱۱
۸-۲-۳- دیگر معیارها ۲۱۱

عنوان **صفحه**

۸-۲-۳-۱- چولگی ۲۱۱
۸-۲-۳-۲- کشیدگی: ۲۱۲
خلاصه فصل ۲۱۳
تست‌های فصل هشتم ۲۱۵
پاسخ تست‌های فصل هشتم ۲۱۶

فصل نهم: توزیع‌های نمونه‌گیری

۹-۱- مقدمه ۲۱۹
۹-۲- نمونه‌گیری تصادفی ۲۱۹
۹-۳- آماره‌ها و توزیع‌های نمونه‌ای ۲۱۹
۹-۴-توزیع کای- دو ۲۲۱
۹-۵-توزیع T (استودنت) ۲۲۳
۹-۶-توزیع F ۲۲۶
خلاصه فصل ۲۳۰

فصل دهم: آماره‌های معروف

۱۰-۱- توزیع میانگین نمونه ۲۳۳
۱۰-۲- توزیع واریانس نمونه، S^2 ۲۳۳
۱۰-۳- توزیع $\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$ ۲۳۴
۱۰-۴- توزیع اختلاف بین میانگین دو نمونه ۲۳۵
۱۰-۴-۱- توزیع تفاوت بین میانگین‌های دو نمونه و واریانس جوامع معلوم ۲۳۵
۱۰-۴-۲-توزیع تفاوت بین میانگین‌های دو نمونه و واریانس‌های جوامع نامعلوم ولی مساوی ۲۳۵
۱۰-۵- توزیع نسبت واریانس‌های دو نمونه ۲۳۶
خلاصه فصل ۲۳۷
تست‌های تألیفی ۲۳۸
تست‌های فصل دهم ۲۴۸
پاسخ تست‌های فصل دهم ۲۵۰

فصل یازدهم: برآورد نقطه‌ای

۱۱-۲ برآورد نقطه‌ای ۲۵۵
۱۱-۳- برآورد کننده‌های ناریب ۲۵۵
۱۱-۴ میانگین مربع خطا ۲۵۶
۱۱-۵- براورد کننده‌های سازگار ۲۵۹
۱۱-۶- روش‌های یافتن برآورد کننده‌ها ۲۵۹
۱۱-۶-۱ روش گشتاورها ۲۶۰
۱۱-۶-۲- روش درستنمای ماکزیمم(MLE) ۲۶۰
خلاصه فصل ۲۶۶
تست‌های تألیفی ۲۶۷

عنوان **صفحه**

تست‌های فصل یازدهم ۲۷۷
پاسخ تست‌های فصل یازدهم ۲۸۲

فصل دوازدهم: برآوردگر فاصله‌ای

۱۲-۱- مقدمه ۲۹۱
۱۲-۲- فاصله اطمینان برای میانگین توزیع نرمال ۲۹۱
۱۲-۲-۱- فاصله اطمینان برای میانگین توزیع نرمال ، انحراف معیار جامعه معلوم ۲۹۱
۱۲-۲- ۲- فاصله اطمینان برای میانگین توزیع نرمال ، انحراف معیار جامعه نامعلوم ۲۹۲
۱۲-۳- فاصله اطمینان برای واریانس توزیع نرمال ۲۹۳
۱۲-۴- فاصله اطمینان برای تفاوت میانگین های دو توزیع نرمال ، انحراف معیار معلوم ۲۹۴
۱۲-۵- فاصله اطمینان برای تفاوت میانگین های دو توزیع نرمال مستقل ، انحراف معیار جوامع نا معلوم ولی مساوی ۲۹۴
۱۲-۶- براورد نسبت دو واریانس در توزیع نرمال ۲۹۵
۱۲-۷- فواصل اطمینان برای جوامع برنولی ۲۹۶
۱۲-۷-۲- فاصله اطمینان برای تفاوت نسبت های دو جامعه برنولی ۲۹۶
۱۲-۸- فاصله اطمینان برای پارامتر λ در توزیع پواسون ۲۹۷
خلاصه فصل ۳۰۱
تست‌های تألیفی ۳۰۲

فصل سیزدهم: آزمون فرض

۱۳-۱- مقدمه ۳۱۳
۱۳-۲- آزمون فرض آماری ۳۱۴
۱۳-۳- P-VALUE (P- مقدار) ۳۱۶
۱۳-۴- آزمون فرض در مورد میانگین جامعه نرمال ۳۱۷
۱۳-۴-۱- آزمون فرض در مورد میانگین جامعه نرمال با انحراف معیار معلوم ۳۱۷
۱۳-۴-۲-آزمون فرض در مورد میانگین جامعه نرمال با انحراف معیار نا معلوم ۳۱۹
۱۳-۵- آزمون فرض برابری میانگین‌های دو توزیع نرمال مستقل ۳۲۰
۱۳-۵-۳- آزمون فرض برابری میانگینها در حالتی که مشاهدات به صورت زوجی است. ۳۲۲
۱۳-۶- آزمون فرض برابری واریانس‌های دو توزیع نرمال مستقل ۳۲۲
۱۳-۶-۱- آزمون فرض برابری واریانس های دو توزیع نرمال مستقل با میانگین نا معلوم ۳۲۲
۱۳-۶-۲- آزمون فرضی برابری واریانس های دو توزیع نرمال مستقل با میانگین های معلوم ۳۲۳
۱۳-۷- آزمون فرض در مورد واریانس یک جامعه نرمال ۳۲۴
۱۳-۸- آزمون فرض اختلاف δ میانگین های دو توزیع نرمال مستقل، هرگاه انحراف معیار جوامع معلوم باشد. ۳۲۵
۱۳-۹- آزمون فرض برابری پارامتر P در چند جامعه برنولی ۳۲۶
۱۳-۱۰- آزمون های فرض مربوط به نسبت ها ۳۲۷
۱۳-۱۰-۱- آزمون فرض در مورد پارامتر P یک جامعه برنولی ۳۲۷
۱۳-۱۰-۲- آزمون برابری پارامتر P در دو جامعه بر نولی ۳۲۸
۱۳-۱۱- بقیه آزمونها ۳۲۸
۱۳-۱۱-۱- آزمون های نیکویی برازش ۳۲۸
۱۳-۱۱-۲- آزمون‌های استقلال ۳۳۰
۱۳-۱۱-۳- آزمون های کای ـ دو ۳۳۱

عنوان **صفحه**

خلاصه فصل ۳۳۶
تست‌های تألیفی ۳۳۷
تست‌های فصل سیزدهم ۳۴۵
پاسخنامه فصل سیزدهم ۳۵۱

فصل چهاردهم: تحلیل واریانس

۱۴-۱- مقدمه ۳۶۱
۱۴-۲- تحلیل واریانس یکطرفه ۳۶۱
۱۴-۳- طرح آزمایش‌ها ۳۶۵
۱۴-۴-تحلیل واریانس دوطرفه ۳۶۶
خلاصه فصل ۳۷۳
تست‌های فصل چهاردهم ۳۷۴
پاسخنامه تست های فصل چهاردهم ۳۷۹

فصل پانزدهم: رگرسیون و همبستگی

۱۵-۱- مقدمه ۳۸۷
۱۵-۲- رگرسیون خطی ۳۸۸
۱۵-۲-۱ روش حداقل مربعات برای برآورد پارامترهای رگرسیون خطی ساده ۳۸۹
۱۵-۳- تحلیل رگرسیون نرمال ۳۹۱
۱۵-۴- آزمونهای فرض برای ضرایب خط رگرسیون در حالت نرمال بودن توزیع ε_i ها ۳۹۳
۱۵-۵- نکاتی چند در مورد تحلیل همبستگی ۳۹۶
خلاصه فصل ۴۰۱
تستهای تألیفی ۴۰۲
تست‌های فصل پانزدهم ۴۱۱
پاسخنامه فصل پانزدهم ۴۱۴

فصل اول

آنالیز ترکیبی

عناوین اصلی

- اصل اساسی شمارش
- جایگشت‌ها
- ترتیب
- ترکیب
- تعداد جوابهای صحیح معادله

فصل اول

آنالیز ترکیبی

۱-۱- مقدمه

«آنالیز ترکیب» یا همان «نظریه شمارش» نقش مهمی در روش‌های محاسبه احتمال بازی می‌کنند.
در واقع به طور ساده نظریه شمارش به شمارش تعداد عناصر یک مجموعه متناهی و البته گسسته می‌پردازد. توجه شود که این شمارش، در این فصل، در اکثر اوقات شمارش مستقیم نیست. به عنوان مثال اگر بخواهیم تعداد حالاتی (شیر یا خط) که اگر ۶ سکه را پرتاب کنیم داشته باشیم یا حداقل بخواهیم تعداد حالات ممکن را بشماریم نمی‌توانیم تک تک رویدادها را بشماریم. در اینجا با یک سری قواعد و اصول این شمارش انجام می شود..

۱-۲- اصل اساسی شمارش

اصل اساسی شمارش یا اصل ضرب همان‌طور که از اسم آن پیداست پایه تمام روش‌های شمارش می‌باشد که این اصل بصورت زیر بیان می‌شود.

اصل اساسی شمارش

فرض کنید دو آزمایش باید انجام گیرد. اگر آزمایش اول m نتیجه و آزمایش دوم n نتیجه ممکن داشته باشد آنگاه برای انجام دو آزمایش با هم mn نتیجه ممکن وجود دارد. (هر نتیجه‌ای که در آزمایش اول بیاید، n نتیجه برای آزمایش دوم می‌توانیم داشته باشیم و برعکس)
قبل از اینکه وارد مثال‌های اصل اساسی شمارش شویم باید متذکر شد که حفظ فرمول برای کنکور در اکثر اوقات نتیجه مطلوب را نمی‌دهد بنابراین بیشتر باید روی مفاهیم اساسی و پایه‌ای مثل همین اصل اساسی شمارش تأکید فراوان داشته باشیم تا با فهم عمیق از پایه‌ها به بقیه موارد بپردازیم.

مثال

۱) فرض کنید آقای x دارای ۶ شلوار و ۸ بلوز است. این فرد چند وضع لباس می‌تواند داشته باشد؟

تعداد نتایج آزمایش اول = تعداد شلوارها = $m = ۶$

تعداد نتایج آزمایش دوم = تعداد بلوزها= $n = ۸$

تعداد حالات ممکن پوشیدن لباس‌ها $= m.n = ۶ \times ۸ = ۴۸$

حال می‌خواهیم حالتی را در نظر بگیریم که بیش از دو آزمایش انجام می‌گیرد. که این حالت موسوم به تعمیم اصل اساسی شمارش می‌باشد.

تعمیم اصل اساسی شمارش

اگر r آزمایش انجام گیرد و تعداد نتایج آزمایش iام برابر $n_i (i = ۱,...,n)$ باشد برای r آزمایش $\prod_{i=۱}^{r} n_i$ نتیجه ممکن وجود دارد.

(با تأکید مجدد بر اینکه برای مثلاً هر نتیجه آزمایش اول بقیه آزمایش‌ها می‌توانند $\prod_{i=۲}^{r} n_i$ حالت را داشته باشند.)

۲) چند کد پستی هفت رقمی می‌توان با اعداد ۰,۱,...,۹ ایجاد کرد؟ (تکرار مجاز است)

این مسئله را می‌توان به صورت ۱۰ آزمایش (هر رقم کد پستی را یک آزمایش در نظر گرفته‌ایم) در نظر گرفت که هر آزمایش مستقل از دیگر آزمایشات می‌تواند ۱۰ نتیجه در بر داشته باشد پس: $\prod_{i=۲}^{r} n_i = ۱۰\times۱۰\times...\times۱۰$ ؛ تعداد حالات

۳) چند تابع روی n نقطه قابل تعریف‌اند اگر هر تابع بتواند مقدار صفر یا یک را بگیرد؟

اینجا مفهوم آزمایش به چه معناست؟ مسلماً تک تک تابع‌های ما یا باید مقدار یک داشته باشند یا صفر. با این حساب هر تابع یک آزمایش است. پس ما اینجا n آزمایش داریم (همان n تابع) که نتیجه هر آزمایش (همان مقدار تابع) فقط دو حالت دارد.

$$\prod_{i=۲}^{r} n_i = \overbrace{۲\times۲\times...\times۲}^{n} = ۲^n$$

۴) چند عدد ۵ رقمی می‌توان با اعداد ۰ تا ۹ ساخت بشرطی که عدد مورد نظر بر ۲ بخش‌پذیر باشد ولی بر ۵ نه؟

این سؤال فقط در پی دقت شما است. می‌دانیم عددی بر ۲ بخش‌پذیر است که یکان آن زوج باشد و عددی بر ۵ بخش‌پذیر است که یکای آن ۰ یا ۵.

حال، در اینجا ما ۵ آزمایش داریم که هر کدام بغیر از اخری و اولی دارای ۱۰ حالت هستند (سه تای وسط) ولی داستان ما برای اخری و اولی مقداری متفاوت است. به طور ساده می‌توان گفت که اعداد ۹,۷,۳,۵,۱,۰ نمی‌توانند یکان باشند زیرا اگر اینگونه باشد آنگاه عدد مورد نظر در شرایط مسئله صدق نمی‌کند. عدد اولی (ده هزار گان) هم نمی‌تواند صفر باشد. پس آزمایش‌های ما به ترتیب دارای ۴,۱۰,۱۰,۱۰,۹ نتیجه ممکن هستند، نهایتاً تعداد حالات از رابطه زیر حساب می‌گردد.

$$\prod_{i=۲}^{r} n_i = ۹\times۱۰\times۱۰\times۱۰\times۴ = ۳۶۰۰۰$$

۱-۳- جایگشت‌ها

جایگشت نیز حالت خاصی از همان اصل پایه‌ای شمارش است. بدین صورت که می‌خواهیم n شیء را در یک‌سری جایگاه قرار دهیم و می‌خواهیم تعداد حالات ممکن نشستن این اشیاء را بررسی کنیم. باز هم دقت شود که در اینجا مفهوم جایگاه همانند، مفهوم آزمایش در بخش قبل است و نباید این گونه مسائل را منحصر به قرار دادن n شیء در یک جایگاه در نظر گرفت.

۱-۴- ترتیب عناصر

(جایگشت r عنصر از n عنصر) تعداد راه‌هایی که می‌توان از n عنصر متمایز r تای آن‌ها را انتخاب و مرتب نمود برابر است با:

$$P_r^n = n(n-۱)...(n-r+۱) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال

۱) می‌خواهیم ۷ کتاب تحقیق در عملیات و ۷ کتاب آمار را بگونه‌ای در کنار هم قرار دهیم که:

الف) کتاب‌های تحقیق در عملیات و آمار در کنار هم باشند.

ب) هیچ دو کتاب تحقیق در عملیات کنار هم نباشد.

الف) می‌دانیم که قرار است دو تا ۷ تا شیء متفاوت را در کنار هم قرار دهیم بطوریکه هر دو دسته با هم مخلوط نشوند پس داریم: $۷!\times۷!\times۲!$

در عدد بالا:

$۷!$: تعداد جایگشت‌های ۷ کتاب تحقیق در عملیات

$۷!$: تعداد جایگشت‌های ۷ کتاب آمار

$۲!$: تعداد جایگشت دو نوع کتاب (آمار و تحقیق در عملیات)

ب) برای اینکه هیچ دو کتاب تحقیق در عملیات کنار هم قرار نگیرند. به صورت زیر عمل می‌شود.

$$۱۴\times۷\times۶\times۶\times۵\times۵\times۴\times۴\times۳\times۳\times۲\times۲\times۱\times۱$$

در عدد حاصل شده از بالا:

۱۴: در مکان اول هر کتابی (از هر نوع) می‌تواند قرار گیرد.

۷: در مکان اول که ۱۴ حالت متفاوت دارد بالاخره یا کتاب تحقیق نشسته است یا آمار، پس در مکان بعدی اگر اولی کتاب تحقیق باشد هر ۷ کتاب آمار را می‌توان قرار داد همینطور اگر در مکان اولی کتاب آمار باشد باز هم می توان با ۷ گزینه ممکن مکان دوم را با کتاب تحقیق پر کرد.

۶×۶: فرض کنید در مکان اولی کتاب آمار و در دومی کتاب تحقیق گذاشته‌ایم پس در مکان سوم فقط می‌توان کتاب آمار قرار داد و جایگاه بعدی فقط می‌تواند با ۶ کتاب تحقیق باقیمانده پر شود. به همین ترتیب قضیه ادامه پیدا می‌کند تا آخر.

۲) از بین ۲۰ دانش‌آموز می‌خواهیم رئیس شورای مدرسه، معاول اول و دوم آن را انتخاب کنیم این کار به چند طریق ممکن است؟

همانطور که کاملاً واضح است ترتیب انتخاب مهم است پس باید از فرمولهای مربوط به ترتیب استفاده کرد یعنی تعداد جوابها برابر است با:

$$P_{۳}^{۲۰}=\frac{۲۰!}{۱۷!}$$

۳) اگر از میان ۳۰ کارت با شماره‌های ۱ تا ۳۰ ,۳ کارت بیرون کشیده و آن‌ها را به افراد A , B و C بدهیم چند حالت ممکن است برای دادن کارت به این سه نفر امکان‌پذیر است؟

باز هم در این مثال ترتیب کشیدن کارت‌ها مهم است پس از فرمول ترتیب استفاده می‌کنیم.

$$P_{۳}^{۳۰}=\frac{۳۰}{۲۷!}$$

۴) چند ترتیب متفاوت از حروف کلمه hakhamaneshi می‌توان ساخت؟

در این مسائل باید دقت کرد که ما مثلاً بین aهای موجود در مسئله هیچ تفاوتی قائل نمی‌شویم. پس در کل ۳ حرف a، ۳ عدد h و یک عدد هم از حروف i,e,n,m و s دیده می‌شود. حال فرض کنید همه حروف متفاوت‌اند در این صورت ما $۱۲!$ کلمه می‌توانیم بسازیم ولی از این $۱۲!$ کلمه تعداد زیادی یکسان‌اند. $۳!\times۳!\times۱!\times۱!\times۱!\times۱!\times۱!=۳۶$

اگر عدد $۱۲!$ را به ۳۶ که از بالا بدست آمده تقسیم کنیم جواب مسئله بدست می‌آید. $\frac{۱۲!}{۳۶}$

تعمیم استدلال بالا به صورت زیر بیان می‌شود.

تعداد جایگشت‌های n شیء متفاوت که n_i تا آن نوع $i\ (i=۱,...,r)$ باشد و $n=\sum_{i=۱}^{r} n_i$ برابر زیر است.

$$\frac{n!}{\prod_{i=۱}^{r} n_i!}$$

۵) ۵۰ توپ با رنگ‌های آبی، قرمز، سبز، زرد و نارنجی از هر کدام ده‌تا داریم چند ترتیب متفاوت از آن‌ها را می‌توان در یک ردیف چید؟

اگر همه اشیاء متفاوت باشند می‌دانیم که ۵۰! حالت وجود دارد. حال باید «تعداد فاکتوریل» هر دسته مشابه را بدست آورد در همه ضرب و در نهایت ۵۰! را به عدد بدست آمده تقسیم کرد. پس داریم.

$$\frac{۵۰!}{(۱۰!)^۵}$$

۶) به چند طریق می‌توان ۱۰ نفر را کنار هم چید طوریکه دو نفر خاص کنار هم باشند؟

📖**نکته:** تعداد روش‌هایی که n نفر را می‌توان دور یک میز نشاند، $(n-۱)!$ است. در این مثال $۲!\times ۹!$ جواب است ($۲!$ بخاطر جایگشت آن دو نفری است که به صورت یک نفر در نظر گرفته‌ایم.

۱-۵- ترکیب

در این بخش، به مطالعه انتخاب چند شیء، از میان چند شیء دیگر می‌پردازیم. تفاوت این بخش و بخش قبل در این است که در این جا می‌خواهیم از میان n شیء مثلاً K شی (مسلماً باید $k \le n$) را برداریم و تمام ولی در بخش قبل n شیء داشتیم می‌خواستیم این n شیء را در یک ردیف مثلاً بچینیم. (راجع به تفاوت ترکیب و ترتیب در ادامه توضیح می‌دهیم)

مثال

۱) می‌خواهیم از میان دانشجویان کنکور ارشد صنایع، ۵ دانشجوی خوش‌شانس را انتخاب کنیم. اگر فرض کنیم تعداد آزمون دهندگان ۵۰۰۰ نفر باشند چند حالت انتخاب وجود دارد؟

توجه کنید که در این مثال اصلاً حرف از اینکه می‌خواهیم این ۵ نفر را به طور خاصی بترتیب قرار دهیم به میان نیامده است مثلاً ما نمی‌گوییم می‌خواهیم به این ۵ نفر جایزه بدهیم که ترتیب آن‌ها اهمیت داشته باشد. تنها می‌خواهیم ۵ نفر را انتخاب کرده و تمام. حال اگر اهمیت ترتیب داشت به سادگی روال همیشگی به صورت زیر داشتیم:

$$P_۵^{۵۰۰۰} = ۵۰۰۰\times ۴۹۹۹\times ۴۹۹۸\times ۴۹۹۷\times ۴۹۹۶ = \frac{۵۰۰۰!}{(۵۰۰۰-۵)!}$$

حال چون جایگاه افراد یا اشیاء یا ... برای ما اهمیت ندارد این حاصل را به «تعداد افراد فاکتوریل» تقسیم می‌کنیم. داریم:

$$\frac{۵۰۰۰\times ۴۹۹۹\times ۴۹۹۸\times ۴۹۹۷\times ۴۹۹۶}{۵\times ۴\times ۳\times ۲\times ۱}$$

با مثال فوق آماده ارائه نمادگذاری ترکیب r شیء از n شیء شده‌ایم.

تعریف: علامت $\binom{n}{r}, r \le n$ به صورت زیر تعریف می‌شود که این علامت همان ترکیب r شیء از n شیء را به ما نشان می‌دهد.

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

۲) از بین ۵ دانشجوی پسر، ۶ دختر می‌خواهیم شورای صنفی دانشکده مهندسی صنایع را شکل دهیم. اگر در این شورا ۵ عضوی عضویت ۲ پسر و ۳ دختر لازم باشد چند ترکیب مختلف اعضای شورا می‌تواند انتخاب شود؟

سؤال از ما ترکیب $n_۱$ شیء از $N_۱$ شیء و ترکیب $n_۲$ شی از $N_۲$ شیء را خواسته است. نه $n_۱$ شیء از $N_۱$ تا یا $n_۲$ شیء از $N_۲$ تا (به کلمات زیر خط کشیده شده دقت شود). حال دو حالت بالا بررسی می‌شود.

۱) $n_۱$ تا از $N_۱$ و $n_۲$ تا از $N_۲$:

تعداد ترکیب‌های ممکن $n_۲$ تا از $N_۲$ تا ↓ تعداد ترکیب‌های ممکن $n_۱$ تا از $N_۱$ تا

تعداد ترکیب‌های ممکن = (تعداد ترکیب‌های انتخاب $n_۲$ شیء از $N_۲$ تا) × (تعداد ترکیب‌های انتخاب $n_۱$ شیء از $N_۲$ تا)

این ضربدر بخاطر کلمه «و» است.

۲) $n_۱$ تا از $N_۱$ یا $n_۲$ تا از $N_۲$:

تعداد ترکیب‌های ممکن = (تعداد ترکیب‌های ممکن $n_۲$ تا از $N_۲$ تا) + (تعداد ترکیب‌های ممکن $n_۱$ تا از $N_۱$ تا)

این علامت جمع بخاطر «یا» است

حال نوبت به جواب مسئله می‌رسد که داریم: $\binom{۵}{۲}\times\binom{۶}{۳}$

۳) در مثال قبل تعداد حالاتی که دو نفر از اعضا در گروه دخترها، یا با هم انتخاب شوند یا هیچکدام وارد شورا نشوند را بدست آورید.

یا دو نفر به شورا وارد نمی‌شود (۲) + یا دو نفر به شورا وارد می‌شوند (۱) = تعداد حالات ممکن

مورد اول می‌گوید که آن دو فرد خاص از قبل انتخاب شده‌اند پس الان از گروه دخترهای نامزد باید یک نفر و از یک گروه پسرها باید ۲ انتخاب شود. بنابراین: $\binom{۵}{۲}\times\binom{۴}{۱}$ = تعداد حالات ممکن (در حالت اول)

مورد دوم نیز بیانگر این است که این دو نفر اصلاً انتخاب نخواهند شده پس داریم: $\binom{۵}{۲}\binom{۴}{۳}$ = تعداد حالات ممکن (در حالات دوم)

$\binom{۵}{۲}\binom{۴}{۳}+\binom{۵}{۲}\binom{۴}{۱}$ = تعداد حالات در حالت دوم + تعداد حالات در حالت اول = تعداد حالات روی هم رفته

از رابطه بالا به طور کلی می‌توان استفاده کرد.

📖**نکته: فرض کنید در دو مثال پیش‌تر n پسر داشتیم و می‌خواستیم rتای آن‌ها را برای شورای صنفی انتخاب کنیم. حال فرض کنید اسم یکی از پسرها داریوش است برای تعداد حالات انتخاب داریم:**

تعداد حالاتی که داریوش انتخاب نشود. + تعداد حالاتی که داریوش انتخاب شود = تعداد حالات انتخاب

تعداد حالات انتخاب r تا از $n-۱$ تا + تعداد حالات انتخاب $r-۱$ تا از $n-۱$ تا = تعداد حالات انتخاب r شی از n تا

(چون از n نفر، داریوش کم شده است) (چون یک نفر از هر دو مجموعه کم شده است)

$$\binom{n}{r}=\binom{n-۱}{r-۱}+\binom{n-۱}{r};۱\le r\le n$$

این هم رابطه‌ای است که حفظ کردن آن بعضی مواقع و عمیق فهمیدن آن همواره می‌تواند کمک کننده باشد.

۴) چند زیر مجموعه از یکی مجموعه n عضوی می‌توان ساخت؟

طبق استدلالی که در گذشته استفاده می‌کردیم می‌دانیم که اگر قرار باشد زیر مجموعه‌های یک مجموعه n عضوی را بدست آوریم. هر عضو می‌تواند یا در زیر مجموعه باشد یا نه پس تعداد کل حالات و در واقع زیر مجموعه‌های از رابطه زیر حساب می‌شود.

$$\overbrace{۲\times۲\times\ldots\times۲}^{n}=۲^n$$

از طرفی می‌دانیم:

زیر مجموعه‌های n بعدی +... + زیر مجموعه‌های دوبعدی + زیر مجموعه‌های یک بعدی = تعداد کل زیرمجموعه‌ها

$$۲^n = \binom{n}{۱} + \binom{n}{۲} + ... + \binom{n}{n}$$

اگر کمی با حوصله به فرمول بالا نگاه کنیم می‌توانیم رابطه زیر را حدس بزنیم.

$$\sum_{k=۰}^{n}\binom{n}{k} = ۲^n$$

حالت کلی‌تر این فرمول به صورت زیر بوده و به قضیه دو جمله‌ای معروف است.

$$(x+y)^n = \sum_{k=۰}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}$$

برای دیدن اثبات ترکیباتی این قضیه (برای فهم عمیق‌تر) به صفحه ۸ کتاب شلدون-راس ترجمه همدانی، پارسیان مراجعه شود.

حالت کلی‌تر این قضیه نیز به قضیه چند جمله‌ای موسوم است.

$$(x_۱ + x_۲ + ..., x_r)^n = \sum_{(n_۱,...,n_۲)}\binom{n}{n_۱, n_۲, ..., n_r}x_۱^{n_۱}x_۲^{n_۲}...x_r^{n_r}$$

که $i = ۱,...r,\ n_i > ۰$ و $\sum_{i=۱}^{n} n_i = n$

۶) در بسط $(\sum_{i=۱}^{۶} x_i)^۵$، ضریب $x_۱^۱x_۲^۲x_۳x_۴^۲x_۵$ چند است؟

$$\frac{۵!}{۱!\times۲!\times۲!\times۰!\times۰!} = \frac{۵!}{۴}$$

در این چند جمله‌ای ضریب $x_۱x_۲x_۳x_۴$ چند است؟

دقت شود که این ضریب صفر است نه $\frac{۵!}{۱!\times۱!\times۱!\times۱!}$ زیرا جمع توان‌ها برابر ۵ نیست. (به عبارتی چنین چند جمله‌ای نداریم)

۱-۶- تعداد جواب‌های صحیح معادلات

با استفاده از یک مثال این مبحث را توضیح می‌دهیم.

مثال

۱) می‌خواهیم در ۳ پروژه مختلف سرمایه‌گذاری انجام دهیم اگر کل سرمایه ما ۱۰۰ واحد باشد. آنگاه چند حالت ممکن برای سرمایه‌گذاری ما در کل پروژه‌ها وجود دارد؟ (لزومی برای شرکت در هیچ پروژه‌ای نیست).

میزان سرمایه‌گذاری در پروژه سوم + میزان سرمایه‌گذاری در پروژه دوم + میزان سرمایه‌گذاری در پروژه اول = ۱۰۰ واحد

$$۱۰۰ = x_۱ + x_۲ + x_۳$$

حال با توجه به گزاره زیر جواب این مسئله را حساب می‌کنیم.

نکته: تعداد $\binom{n-۱}{r-۱}$ بردار متمایز، $(x_۱,...,x_r)$ عنصری با عناصر صحیح مثبت $(i = ۱,۲,...,r)x_i > ۰$ و با شرط $x_۱ + x_۲ + ... + x_n = n$ وجود دارد.

اگر عناصر ما صفر هم باشند و تعداد بردارهای متمایز به $\binom{n+r-۱}{r-۱}$ تغییر می‌یابد.

پس در این مثال تعداد حالات $\binom{۱۰۰+۲}{۲} = \binom{۱۰۲}{۲}$ است.

۲) اگر شرایط زیر را داشته باشیم چند مجموعه جواب $(x_۱, x_۲, x_۳, x_۴)$ می‌تواند وجود داشته باشد؟

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ < ۵ \ , x_۴ > -۲ \ , \ x_۳ \geq -۵ \ , \ x_۲ \geq ۱ \ , x_۱ \geq ۰$$

در این حالت‌ها باید تغییر متغیر زیر را انجام دهیم.

$$t_۱ = x_۱ \qquad t_۲ = x_۲ - ۱ \qquad t_۳ = x_۳ + ۵$$

$t_۴ = x_۴ + ۱$ (به تفاوت مساوی و کمتر مساوی دقت کنید)

حال سراغ معادله می‌رویم و با اضافه کردن $t_۵ \geq ۰$ آن را به تساوی تبدیل می‌کنیم داریم:

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ < ۵ \Rightarrow \sum_{i=۱}^{۴} x_i \leq ۴ \Rightarrow \sum_{i=۱}^{۴} x_i + t_۵ = ۴$$

$$\xrightarrow{\text{با تغییر متغیر داریم}} t_۱ + t_۲ + ۱ + t_۳ - ۵ + t_۴ - ۱ + t_۵ = ۴$$

$$\sum_{i=۱}^{۵} t_i = ۹$$

چون $t_i \geq ۰ (i = ۱,..,۵)$، پس جواب به صورت زیر است.

$$\binom{۹+۵-۱}{۵-۱} = \binom{۱۳}{۴}$$

در اینجا توضیحات بخش اول به پایان رسید. دانشجویان عزیز توجه کنند که مطالعه عمیق این فصل کمک شایانی در مفهوم فصول بعدی به شما خواهد کرد. پس با درک مفهومی این بخش (نه فقط حفظ فرمول‌ها) راه را برای فصل‌های بعد هموار کنید.

خلاصه فصل

اصل اساسی شمارش بطور کلی و تعمیم یافته به بررسی تعداد حالت‌های ممکن اتفاقی ناشی از انجام r آزمایش که هر کدام مستقلاً می‌توانند $n_i\ (i=1,...,r)$ نتیجه داشته باشند می‌پردازد. بعد از این اصل به بررسی جایگشت یا همان ترتیب و ترکیب پرداخته‌ایم. ترتیب یعنی اینکه از میان n شیء قرار است r شیء را انتخاب کرده و در جایگاه‌های با ارزش متفاوت قرار دهیم. ترتیب[1] r شی از n که در واقع دارای همین تعریف است. به صورت زیر نشان داده می‌شود.

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)}$$

ترکیب[2] فقط، r شی از بین n شیء انتخاب می‌کند و به چیدمان هیچ کاری ندارد. داریم:

$$C_n^r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

که فرمول بالا همان ترکیب r شیء از n شیء را به ما می‌دهد. در نهایت هم به قضیه دو جمله‌ای پرداخته شد یعنی:

$$(x+y)^n = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$$

و تعمیم رابطه بالا به n متغیر را نیز بررسی کردیم.
در نهایت به بحث در مورد تعداد جوابهای صحیح معادلات پرداختیم.

مثال

۱) به چند طریق می‌توان ۱۰۰ شیء متفاوت را در ۳ مکان قرار دارد به شرطی که در هر مکان حداقل یک شیء باشد؟

جواب:

تعداد حالاتی که حداقل یک مکان خالی باشد- کل حالات = تعداد حالاتی که در هر مکان حداقل یک شیء باشد.

کل حالات $= 3^{10}$

تعداد حالاتی که حداقل یک مکان خالی باشد = تعداد حالاتی که یا مکان اول یا دوم یا سوم خالی باشد − تعداد حالاتی مکان دوم و سوم با هم خالی باشند + تعداد حالاتی که مکان اول و سوم با هم خالی می‌باشند

تعداد حالاتی که مکان‌ها اول و دوم و سوم باهم خالی باشند + تعداد حالاتی که مکان اول و دوم با هم خالی باشند − $\binom{3}{1}2^{10}$ = تعداد حالاتی که یا مکان اول یا دوم یا سوم خالی باشند.

1^{10} = تعداد حالاتی که مکان اول و سوم با هم خالی باشند.

۰ = تعداد حالاتی که مکان‌های اول، دوم و سوم با هم خالی باشند.

می‌دانیم که در فرمول نوشتاری بالا جملات دوم، سوم و چهارم با هم برابرند پس داریم

تعداد حالاتی که حداقل در هر مکان یک شیء باشد. $= 3^{10} - \binom{3}{1}2^{10} + \binom{3}{2}1^{10} - 0$

نکته: تعداد حالات قرار دادن n توپ متفاوت در r ظرف متفاوت بصورتیکه در هر ظرف حداقل یک توپ باشد برابر است با:

$$\sum_{i=0}^{r} (-1)^i \binom{r}{i} (r-i)^n$$

---

۱ - Permutation
۲ -Combination

نکات زیر را به عنوان نکات تکمیلی این فصل برگزیده‌ایم. این نکات چکیده نکات تست‌های کنکور سال‌های اخیر بوده و تعاریف نیز مهم هستند.

۱) در کنار اصل جمع ضرب، اصل جمع نیز وجود دارد.

اصل جمع: فرض کنید عملی را بتوان با دو روش A یا B انجام داد. اگر عمل A به m طریق و عمل B به n طریق قابل انجام باشد و این دو عمل نتواند همزمان با هم اتفاق افتند آنگاه این کار به $m+n$ طریق قابل انجام است.

۲) تبدیل‌ها یا جایگشت‌ها را می‌توان به چهار دسته عمده تقسیم کرد.

الف) جایگشت خطی: اگر n عضو متمایز را بخواهیم در کنار هم در یک خط (صف) قرار دهیم تعداد جایگشت‌های ممکن برابر است با: $n(n-۱)(n-۲)...(n-n+۱)=n!$

ب) جایگشت دایره‌ای: همان جایگشت خطی تنها به جای خط یا صف، دایره داریم. تعداد جایگشت‌ها برابر است با $(n-۱)!$

ج) جایگشت یک در میان: اگر بخواهیم m عنصر از یک گروه و n عنصر از گروهی دیگر را به صورتی یک در میان در یک خط مرتب کنیم دو حالت وجود دارد.

۱) اگر $m=n$ باشد آنگاه تعداد حالات: $۲\times m!\times n!$

۲) اگر $m=n+۱$ باشد آنگاه تعداد حالات: $m!\times n!$

د) جایگشت با تکرار: تعداد جایگشت‌های مختلف n عنصر که $n_۱$ تای آن از نوع اول، $n_۲$ تا از نوع دوم و .... و n_k تای آن از نوع kام می‌باشد برابر است با: $\frac{n!}{n_۱!n_۲!...n_k!}$

روابط زیر را بهتر است به یاد داشته باشید زیرا می‌توانند کمک خوبی به شما بکنند.

۱) $\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$

۲) $\sum_{i=۰}^{n}\binom{n}{i}=۲^n$

۳) $\sum_{i=۱}^{k}\binom{n}{i}=\sum_{i=۰}^{k-۱}\binom{n}{i}=۲^{n-۱}$

i: زوج i: فرد

۴) $\sum_{k=۱}^{n}k\binom{n}{k}=n\times ۲^{n-۱}$

۵) $\sum_{i=۱}^{n}(-۱)^i\binom{n}{i}=۰$

۶) $i\binom{n}{i}=n\binom{n-۱}{i-۱}$

۷) $\sum_{i=۱}^{n}\binom{n}{i}^۲=\binom{۲n}{n}$

۸) $\binom{۲n}{n}=\sum_{k=۰}^{n}\binom{n}{k}^۲$

۹) $\binom{n+m}{r}=\binom{n}{۰}\binom{m}{r}+\binom{n}{۱}\binom{m}{r-۱}+...+\binom{n}{r}\binom{m}{۰}$

۱۰) $\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k^2 = 2^{n-2}n(n+1)$

۱۱) $\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k^3 = 2^{n-3}n^2(n+3)$

۱۲) $\sum_{j=i}^{n}\binom{n}{j}\binom{j}{i} = \binom{n}{i}2^{n-i} \qquad i<n$

۱۳) $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$

دانشجویان عزیز توجه کنند که آوردن فرمول‌های بالا به دو دلیل زیر است.

۱) چشم شما با ظواهر آن‌ها آشنا باشد.

۲) با استدلال‌های ساده می‌تواند آن‌ها را اثبات کنید.

اصلاً حفظ کردن این فرمول‌ها توصیه نمی‌شود بلکه فقط چگونگی بوجود آوردن آن‌ها مهم است. برای مثال برای توجیه فرمول شماره ۹ می‌توانید تصور کنید که می‌خواهیم از بین n مرد و m زن rتا را انتخاب کنید. حال یا هیچ مردی در این rتای انتخابی نیست که تعداد انتخاب‌ها $\binom{n}{0}\binom{n}{r}$ است یا یکی مرد است که تعداد انتخاب‌ها $\binom{n}{1}\binom{m}{r-1}$ می‌شود و الی آخر.

۱)گذاشت‌ها: در این مسائل تعدادی توپ، درتعداد مشخص جعبه گذاشته می‌شود (n توپ و r ظرف)

الف) بدون محدودیت:

توپ	ظرف	تعداد حالات
یکسان	یکسان	$A(x,y);A(n,r)+A(n,r-1)+...+A(n,1)$:
غیریکسان	یکسان	$S(x,y);S(n,r)+S(n,r-1)+...+S(n,r)$:عدد استرینگ
غیریکسان	غیریکسان	r^n هر توپ r انتخاب دارد.
یکسان	غیریکسان	$\binom{n+r-1}{n}$، این در واقع همان $\sum_{i=1}^{r}x_i = n$ است.

ب) در هر ظرف حداقل یک توپ

توپ	ظرف	تعداد حالات
متفاوت	متفاوت	$r!s(x,r) = \sum_{i=1}^{r-1}(-1)^i\binom{r}{i}(r-i)^n$
یکسان	متفاوت	$\binom{n-1}{r-1}$
متفاوت	یکسان	$s(n,r) = \sum(-1)^i\binom{r}{i}(r-i)^n$ عدد استرینگ
یکسان	یکسان	$A(n,r)$

$x_1 + x_2 + ... + x_r = n$

$1 \le x_i$

$0 \le y_i$

مثلاً حالت دوم بصورت زیر حساب می‌شود.

$$\sum_{i=1}^{r}g_i = n-r \Rightarrow \binom{n-r-r-1}{r-1} = \binom{n-1}{r-1}$$

۲) برداشت‌ها: برداشت از n شی می‌خواهیم r شیء برداریم

الف) n شی متمایز و محدودیت نداریم.

بدون جایگذاری	r تایی مرتب	P_r^n
بدون جایگذاری	r تایی نامرتب	C_n^r
با جایگذاری	r تایی مرتب	n^r
با جایگذاری	r تایی نامرتب	$\binom{n+r-1}{r}$

ب) $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$

بدون جایگذاری	r تایی مرتب	–
بدون جایگذاری	r تایی نامرتب	$\sum_{i=1}^{r} x_i = k$: $\binom{n+k-1}{k-1}$
با جایگذاری	r تایی مرتب	k^r: در هر انتخاب یکی از k نوع را می‌توان انتخاب کرد.
با جایگذاری	r تایی نامرتب	$\sum_{i=1}^{k} x_i = r$: $\binom{k+r-1}{r}$: تعداد دفعاتی که توپ نوع اول برداشته می‌شود.

$$\sum_{i=1}^{k} X_i = r$$

در هر انتخاب یکی از k۰ نوع را می‌توان انتخاب کرد.

ج) n شیء متمایز (مقدار حداقل اعداد k باشد)

بدون جایگذاری مرتب $\binom{n-(k+1)+1}{r-1} r! = \binom{n-k}{r-1} r!$

$$\{1, 2, ..., k, k+1, ..., n\}$$

ابتدا k را انتخاب می‌کنیم بعد از مجموعه $\{k+1, ..., n\}$ باید $r-1$ تا انتخاب کنیم چون ترتیبشان مهم است که $r!$ ضرب می‌کنیم.

بدون جایگشت نامرتب $\binom{n-k}{r-1}$ فرقش با بالایی در $r!$ است زیرا در نامرتب ترتیب مهم نیست.

با جایگذاری مرتب	$(n-k+1)^r - (n-k)^r$	$\{1, 2, ..., \overbrace{k, k+1, ..., n}\}$
با جایگذاری نامرتب	$\binom{r-1+(n-k+1)-1}{r-1}$	

$$\left.\begin{matrix} \sum_{i=k}^{n} x_i = r \\ 1 \le x_k \end{matrix}\right\} \Rightarrow y_k + x_{k+1} + ... + x_n = r-1$$

نکته: افزار همان گذاشت با محدودیت حداقل یک توپ است.

قضیه چند جمله‌ای:

$$(\sum_{i=r}^{r} x_i)^n = \sum_{(n_1, ..., n_r)} \binom{n}{n_1, n_2, ..., n_r} x_1^{n_1} x_2^{n_2} ... x_r^{n_r}$$

که در آن $\binom{n}{n_1, n_2, ..., n_r}$ به عنوان ضریب چند جمله‌ای شناخته می‌شود.

تست‌های تألیفی

۱- در بسط $\left(\sum_{i=۱}^{P} x_i\right)^n$ تعداد جملات از کدام رابطه بدست می‌آیند؟

۱) $\binom{n+P}{P}$ ۲) $\binom{n+P-۱}{n}$ ۳) $\binom{n+P}{n-۲}$ ۴) $\binom{n+P-۱}{P}$

جواب: راه حل شماره ۱) اگر $n=۱$ باشد می‌دانیم که جواب باید P شود.

الف) $\binom{۱+P}{P}=۱+P$ ب) $\binom{n+P-۱}{n}=P$ ج) تعریف نشده $=\binom{P+۱}{-۱}$ د) $\binom{P}{P}\neq P$

پس گزینه ۲ صحیح است.

راه حل شماره ۲) به عبارت مقابل توجه کنید. $x_۱^{y_۱}x_۲^{y_۲}...x_P^{y_p}$

در واقع هر جمله‌ی این بسط به صورت بالا است. و می‌دانیم که جواب مسئله در واقع همان تعداد جوابهای صحیح برای معادله بالا است. داریم: $\sum_{i=۱}^{P} y_i = n$

$$\binom{n+P-۱}{P-۱}=\binom{n+P-۱}{n}$$

نکته: دقت کنید که $\binom{n+P-۱}{P-۱}=\binom{n+P-۱}{n}$

۲- در بسط $\left(\sum_{i=۱}^{P} f_i x_i\right)^n$ ضریب $x_۱x_۲x_۳$ چند است؟ $(P\geq ۳)$

۱) $n\prod_{i=۱}^{۳} f_i$ ۲) $n^۳\prod_{i=۱}^{۳} f_i$ ۳) $n!\prod_{i=۱}^{۳} f_i^۲$ ۴) $n!\prod_{i=۱}^{۳} f_i$

جواب: گزینه چهارم صحیح است. چرا؟ زیرا اگر f_iها در مسئله نبود که جواب همان $n!$ می‌شد حالا که هست پس باید آن‌ها را هم تأثیر داد. چون x_iها در $x_۱^۱x_۲^۱x_۳^۱$ دارای توان یک هستند پس $\prod_{i=۱}^{۳} f_i$ ضرب ضرایب می‌شود.

۳- به چند طریق می‌توان معادله $\sum_{i=۱}^{۵} x_i = ۴۰۰$ را حل کرد که همه X_i ها مضرب ۴۰ باشند؟

۱) $\binom{۱۴}{۵}$ ۲) $\binom{۱۴}{۴}$ ۳) $\binom{۴۰۴}{۵}$ ۴) $\binom{۴۰۴}{۴}$

جواب: گزینه دوم صحیح است.

اگر به جای هر x_i بگذاریم $۴۰y_i$ باید معادله جواب صحیح داشته باشد.

$$\sum_{i=۱}^{۵} ۴۰y_i = ۴۰۰ \rightarrow \sum_{i=۱}^{۵} y_i = \frac{۴۰۰}{۴۰} = ۱۰ \rightarrow \text{تعداد حالات} = \binom{۱۴}{۴}$$

۴- به چند راه می‌توان ۹ نفر را در ۵ اتاق قرار داد اگر دو نفر خاص بخواهند در یک اتاق باشند (اتاق‌های حداکثر ۲ نفری‌اند)؟

۱) $\frac{۵\times ۸!}{۲!}$ ۲) $\frac{۵!\times ۸!}{۲!}$ ۳) $\frac{۸\times ۵!}{۲!^۴}$ ۴) $\frac{۸!\times ۵}{۲!^۴}$

جواب: گزینه چهارم صحیح است. برای آن دو نفر خاص ۵ حالت وجود دارد. برای باقیمانده ۷ نفر داریم $\frac{۴\times۷!}{۲!\times۲!\times۲!\times۱!}$ که معادل همان $\frac{۸!}{(۲!)^۴}$ است. (توجه شود که آمدن عدد چهار در صورت کسر برای انتخاب اتاقی است که باید یکنفره باشد.)

۵- عبارت معادل $\sum_{x=y}^{n}\binom{x-۱}{y-۱}$ را بیابید.

۱) $\binom{n+y}{y}$ ۲) y^n ۳) $\binom{n}{y}$ ۴) $\binom{n}{y-۱}$

جواب: گزینه اول صحیح است.

$$\sum_{x=y}^{n}\binom{x-۱}{y-۱}=\binom{y-۱}{y-۱}+\binom{y+۱-۱}{y-۱}+\binom{y+۲-۱}{y-۱}+...+\binom{y+n-۱}{y-۱}$$

تعداد جواب‌های معادله	تعداد جواب‌های معادله	تعداد جواب‌های معادله	تعداد جواب‌های معادله
$\sum_{i=۱}^{y}x_i=n$	$\sum_{i=۱}^{y}x_i=۲$	$\sum_{i=۱}^{y}x_i=۱$	$\sum_{i=۱}^{y}x_i=۰$

پس با این تفاسیر می‌توانیم بگوییم که $\sum_{x=y}^{n}\binom{x-۱}{y-۱}$ تعداد جواب‌های معادله $\sum_{i=۱}^{y}x_i\le n$ است. می‌دانیم که تعداد جواب‌های این معادله از رابطه زیر نیز بدست می‌آید.

$$\sum_{i=۱}^{y}x_i+z=n\ ,\ x_i\ge ۰\ ,z\ge ۰$$

نکته:

$$\sum_{i=۱}^{y}x_i\le n\Rightarrow\sum_{i=۱}^{y}x_i+t=n\xrightarrow{\text{تعداد جواب‌ها}}\binom{n+y+۱-۱}{y+۱-۱}=\binom{n+y}{y}$$

$$\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}\xrightarrow{\text{مثال}}\binom{۵}{۲}=۱۰\Rightarrow\binom{۵}{۳}=۱۰\rightarrow\binom{۵}{۲}=\binom{۵}{۵-۲}=\binom{۵}{۳}$$

۶- به چند طریق می‌توان ۴۰۰ توپی یکسان را در ۲۰ کیسه (متفاوت) قرار داد که در کیسه iام حداقل iتا توپ وجود داشته باشد؟

۱) $\binom{۲۰۱}{۱۹۰}$ ۲) $\binom{۲۰۱}{۱۹}$ ۳) $\binom{۱۹۰}{۱۹}$ ۴) $\binom{۲۰۹}{۱۹۰}$

جواب: گزینه چهارم صحیح است.

X_i : مقدارتوپ در کیسه $i(i=۱,۲,...,۲۰)$ $\qquad \sum_{i=۱}^{۲۰}X_i=۴۰۰$

می‌دانیم که باید از ۴۰۰ یک مقداری کم شود. زیرا باید X_iها یا حداقل صفر شوند یا یک تا مسئله قابل حل شود داریم:

$$\sum_{i=۱}^{۲۰}i=\frac{۲۰(۲۱)}{۲}=۲۱۰$$

حال اگر ۴۰۰ را از ۲۱۰ کم کنیم متغیرها ما یعنی x_iها $(i=۱,۲,...,۲۰)$ بزرگتر مساوی صفر می‌شوند.

$$\sum_{i=۱}^{۲۰}x_i=۱۹۰\xrightarrow{\text{تعداد جواب‌ها}}\binom{۱۹۰+۲۰-۱}{۲۰-۱}=\binom{۲۰۹}{۱۹}=\binom{۲۰۹}{۱۹۰}$$

نکته:

$$\sum_{i=۱}^{n}i=\frac{n(n+۱)}{۲}$$

۷- حاصل عبارت $\sum_{i=1}^{n} 2^i \binom{n}{i}$ کدام است؟

۱) $3^n - 1$ ۲) 3^n ۳) $2^n - 1$ ۴) 2^n

جواب) گزینه یک صحیح است.

راه اول: اگر $n = 1$ باشد حاصل سیگما برابر ۲ است که فقط گزینه اول و آخر این را نشان می‌دهند و اگر $n = 2$ باشد حاصل سیگما ۸ است که فقط با گزینه یکم همخوانی دارد.

راه حل دوم: عبارت مورد نظر را مانند زیر باز می‌کنیم

$$\sum_{i=1}^{n} 2^i \binom{n}{i} = \sum_{i=1}^{n} 2^i 1^{n-i} \binom{n}{i} = \sum_{i=0}^{n} 2^i 1^{n-i} \binom{n}{i} - 1 \xrightarrow[x=2,\,y=1]{\text{طبق قضیه‌ای دو جمله اگر}} 2^n - 1$$

۸- تعداد جملات $(x_1 + x_2 + x_3)^4$ که در آن حداقل ۲ متغیر وجود داشته باشند کدام است؟

۱) $\binom{3}{1}\binom{3}{2} + \binom{3}{2}$ ۲) $\binom{2}{1}\binom{2}{2} + \binom{3}{3}$ ۳) $\binom{3}{1}\binom{3}{3} + \binom{3}{2}$ ۴) $\binom{3}{2}\binom{3}{2} + \binom{3}{2}$

جواب) گزینه یک صحیح است.

سؤال تعداد $x_i^{k_1} x_j^{k_2}$ و $x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3}$ را خواسته است داریم:

تعداد $x_i^{k_1} x_j^{k_2}$: $k_1 + k_2 = 4 \longrightarrow \binom{3}{1}\binom{3}{2}$

تعداد $x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3}$ $k_1 + k_2 + k_3 = 4 \rightarrow \binom{3}{2}\binom{3}{3} = \binom{3}{2}$

دو نکته در سؤال بالا باید به آن‌ها دقت شود.

(۱) kها می‌توانند صفر باشند.

(۲) عبارت $\binom{3}{2}$ و $\binom{3}{3}$ بترتیب در اولی و دومی بخاطر انتخاب آن دو یا سه متغیری است که باید انتخاب شوند.

۹- در بسط $(x_1 + x_2 + x_3)^3$ تعداد جملاتی که در آن توان X_2 حداکثر یک است چند تاست؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۵

جواب: گزینه سوم صحیح است.

اگر $x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3}$ را در نظر بگیریم داریم:

$$\begin{matrix} k_1 + k_3 = 2 \\ k_1 + k_3 = 3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} k_1 + k_2 - 2 = 0 \\ k_1 + k_3 - 2 = 1 \end{cases} \xrightarrow{k_3 - 2 = t_1} k_1 + t_1 \le 1 \Rightarrow k_1 + t_1 + t_2 = 1 \left(k_1, t_1, t_2 \ge 0\right)$$

تعداد جواب‌های معادله آخر برابر $\binom{3}{3-1} = 3$

۱۰- عبارت $\sum_{i=0}^{n} \binom{i+r-1}{i}$ با کدامیک از عبارات زیر برابر است؟

۱) $\binom{n+r-1}{n}$ ۲) $\binom{n}{i}$ ۳) $\binom{n+r}{r}$ ۴) هیچکدام

جواب: گزینه سوم صحیح است.