شرح جامع

مدارهای الکتریکی ۱ و ۲

«مهندسی برق»

مولف: حامد بیک خورمیزی

انتشارات ارشد

پیشگفتار ناشر

خداوند بزرگ را شاکریم که فرصتی عنایت فرمود تا بتوانیم قدمی در جهت گسترش علم و فرهنگ کشور عزیزمان برداریم و مسیری هموار را در اختیار مخاطبان و داوطلبان علاقمند به ادامه تحصیل قرار دهیم. از آنجائی که درحوزه کتاب‌های درسی و کمک درسی کارشناسی ارشد کتاب‌های زیادی به رشته تحریر در آمده است با این حال وجود یک مجموعه جامع، دقیق، کامل و دارای رفرنس(منابع) مستند احساس می‌شود.

همیشه دغدغه داشتیم که ای کاش می‌شد تمامی منابع پراکنده و گاهاً دست نایافتنی کنکور در یک مجموعه به گونه‌ای جذاب و شیوا آماده می‌شد و همچنین سوالات دوره‌های قبل کنکور نیز به گونه‌ای تشریحی پاسخ داده می شدند، که خدشه‌ای بر آنها وارد نشود و خیال داوطلبان عزیز آنقدر آسوده باشد که اطلاعات مندرج در پاسخنامه‌ها را برای بهره‌گیری در آزمون خود بکار گیرند. این کار با یاری خداوند بزرگ و همکاری نخبه‌ترین دانشجویان و اساتید کشور در انتشارات ارشد هماهنگ گردید و در تمامی مقاطع تحصیلی از کاردانی به کارشناسی، کارشناسی ارشد و دکتری در حوزهٔ آزمون‌های سراسری – آزاد و پیام نور بسته‌های آموزشی شامل کتاب‌های بانک سوالات و کتاب‌های شرح جامع درس آماده گردید. در تهیه مجموعه‌های فوق‌الذکر از فارغ‌التحصیلان کارشناسی ارشد و دکتری که حائز رتبه‌های تک رقمی کنکور می‌باشند، استفاده کرده‌ایم، تا شما عزیزان بتوانید در راستای افزایش توان علمی خود در جهت نیل به مقصود خویش نایل آیید. بدون تردید می‌توان گفت که برای اولین بار در نظام آموزشی کشور مجموعه‌ای به این سبک عرضه می‌شود که در کیفیت و کمیت بی‌نظیر بوده و تمامی نیازهای دانشجویان و داوطلبان عزیز را پوشش می‌دهد. امید است که استفاده از این مجموعه عزیزان را در جهت موفقیت در آزمون یاری رسانده باشد. در پایان لازم به ذکر است که بی نقصی محض از آن خداوند متعال می‌باشد، بنا براین از تمامی خوانندگان و داوطلبان عزیز خواهشمندیم نظرات سازنده خود را در مورد این کتاب به سایت انتشارات ارشد اعلام نمایند تا ما را در جهت هر چه بهتر آماده کردن این محصولات یاری رسانند.

با تشکر

ناشـــــر

www.arshadbook. ir

پیشگفتار مؤلف

اِلهی کَفی بی عزاً اَن اَکونَ لَکَ عَبدا وَ کَفی بی فَخراً اَن تَکونَ لی رَبّا، اَنتَ کَما اُحِب فَاجعَلنی کَما تُحِب

خدایا این عزت مرا بس است که من بندهٔ توام و این افتخار مرا کافی است که تو پروردگار منی، تو چنانی که دوستت می‌دارم مرا آنگونه قرار ده که دوست می‌داری.

درس مدارهای الکتریکی ۱ و ۲ یکی از دروس مرجع مهندسی برق می‌باشد. این درس برای کلیهٔ گرایش‌های رشته مهندسی برق، همچنین بعضی از رشته‌های مهندسی مانند مهندسی کامپیوتر تدریس می‌شود، که به عنوان یک مرجع اصلی در کنکور کاردانی به کارشناسی، کارشناسی ارشد و همچنین دکتری برق در کشور عزیزمان می‌باشد، لذا یادگیری و فهم اصولی این درس که زیربنای رشته برق می‌باشد با تلاش و تمرین فراوان در سایهٔ منابع پربار علمی دست یافتنی می‌باشد. تسلط براین درس کمک بسزایی در برخی دیگر از دروس مهندسی برق خواهد گذاشت.

کتاب شرح درس مدارهای الکتریکی ۱ و ۲ شامل ۱۱ فصل می‌باشد که در هر فصل ابتدا مقدمه‌ای‌ست کوتاه در مورد کل فصل آورده شده است پس از آن زیر بخش‌های مرتبط با فصل را بصورت ساده توضیح داده و سعی شده است از توضیحات زیاد و غیر ضروری اجتناب گردد. در برخی از زیربخش‌ها برای فهم سریعتر موضوع از چند مثال یا سؤال کنکوری استفاده شده است. در پایان هر فصل خلاصه‌ایی بسیار کوتاه از نکات مهم فصل آورده شده است. در حالت کلی برای افزایش تسلط و یادگیری بیشتر درس مدارهای الکتریکی حل تمرین‌های گوناگون وفراوان از هر مبحث توصیه می‌شود، که بهترین نوع تمرین‌ها، سؤالات کنکورهای ادوار گذشته می‌باشد، بنابراین در پایان هر فصل سؤالات کنکور سراسری و آزاد بصورت طبقه‌بندی شده قرار داده شده است و سعی شده سؤالات طبق زیر فصل‌های داخل هر فصل مرتب شوند. کلید تستی سؤالات نیز بعد از کل سؤالات قرار داده شده‌اند.

در اینجا جا دارد که از معلمان و استادانی که دلسوزانه برای فرزندان این مرز و بوم زحمت می‌کشند تقدیر و تشکر به عمل آورم و برای کلیهٔ دانشجویانی که برای سربلندی این کشور تلاش می‌کنند آرزوی موفقیت کنم. از مدیریت انتشارات ارشد بجهت اعتمادی که به اینجانب داشته‌اند تشکر و قدردانی می‌کنم همچنین از کلیهٔ افرادی که در تایپ، صفحه‌بندی و چاپ این اثر تلاش فراوان کرده‌اند تقدیر و تشکر می‌نمایم.

هیچ تالیفی بدون عیب و کامل مطلق نمی‌باشد، در این اثر نیز امکان وجود کاستی‌های و لغزشها وجود دارد که از کلیهٔ اساتید گرانقدر، دانشجویان عزیز و خوانندگان گرامی تقاضا می‌شود هرگونه پیشنهاد، انتقاد و یا کمبودی که نسبت به این اثر احساس می‌کنند را به آدرس پست الکترونیکی اینجانب () بصورت کامل و مشخص ارسال نمایند.

در پایان این اثر ناچیز را به پدر و مادر عزیز و مهربانم بخاطر کلیهٔ زحماتی که برای من کشیده‌اند تقدیم می‌کنم را از خداوند منان سلامتی و بهروزی برایشان آرزو می‌کنم.

با آرزوی موفقیت

حامد بیک خورمیزی

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فصل اول: المان‌های مدار

۱-۱ مقاومت ۷
۱-۲ قوانین کیرشهف ۸
۱-۳ خازن ۸
۱-۴ سلف ۱۱
۱-۵ منابع ۱۲
۱-۶ روش های تحلیل مدارهای الکتریکی ۱۲
۱-۶-۱ روش تحلیل گره ۱۳
۱-۶-۲ روش تحلیل مش ۱۴
۱-۷ قضایای تونن و نورتن ۲۱
۱-۷-۱ قضیه تونن ۲۱
۱-۷-۲ قضیه نورتن ۲۱
۱-۸ توان ۲۶

فصل دوم: مدارهای مرتبه اول و دوم

۲-۱ معادله دیفرانسیل خطی (جواب عمومی و جواب خصوصی) ۴۴
پاسخ گذرا ۴۷
۲-۷- مدارهای مرتبهٔ دوم ۵۹
۲ -۷-۲- ۱- پاسخ ورودی صفر مدار RLC سری ۵۹
۲-۷-۲-۲- پاسخ حالت صفر مدار RLC سری ۶۱
۲-۷-۲-۳- پاسخ ورودی صفر مدار RLC موازی ۶۳
۲-۸- ضریب کیفیت در مدارات RLC ۶۴

فصل سوم: تزویج و حالت دائمی سینوسی

۳- اعداد مختلط ۱۰۱
۳-۱-۱ نمایش در مختصات قطبی و دکارتی ۱۰۱
۳-۲ فازور ۱۰۳
۳-۲-۱ مشتق و انتگرال فازور ۱۰۴
۳-۳ امپدانس و ادمیتانس فازوری ۱۰۷
۳-۴ پاسخ کامل در مدارات با تحریک سینوسی ۱۰۹
۳-۵ توان الکتریکی ۱۱۱
۳-۵-۱ تعریف توان ۱۱۱
۳-۵-۲ توان لحظه‌ایی و توان متوسط ۱۱۲
۳-۵-۴ توان ظاهری (P_S) ۱۱۵
۳-۵-۵ توان مختلط (□) ۱۱۶
۳-۶ قضیه انتقال توان ماکزیمم ۱۱۶

خلاصه فصل ۱۲۰
اعداد مختلط، امپدانس، ادمیتانس ۱۲۲

فصل چهارم: عناصر تزویج و ترانسفورما تورهای ایده‌آل

۴ – ۱ سلف‌های تزویج ۱۳۶
۴-۲- قرارداد نقطه در سیم پیچ‌ها و ولتاژ القا شده بر روی آنها ۱۴۰

فصل پنجم: تبدیل لاپلاس و کاربرد آن در مدار

۵-۱ خواص تبدیل لاپلاس ۱۶۳
۵-۱-۱ خطی بودن ۱۶۳
۵-۱-۲ خاصیت مشتق‌پذیری ۱۶۳
۵-۱-۳ خاصیت انتگرال‌گیری ۱۶۴
۵-۱-۴ خاصیت مشتق‌گیری در حوزه‌ی فرکانس ۱۶۴
۵-۱-۵ خاصیت تأخیر زمانی ۱۶۴
۵-۱-۶ خاصیت تأخیر فرکانسی ۱۶۴
۵-۱-۷ تبدیل لاپلاس توابع متناوب ۱۶۴
۵-۱-۸ تبدیل لاپلاس کانولوشن ۱۶۴
۵-۱-۹ مقادیر اولیه و نهایی ۱۶۵
۵-۲ محاسبه‌ی عکس تبدیل لاپلاس ۱۶۵
۵-۳ کاربرد تبدیل لاپلاس در مدارهای الکتریکی ۱۶۷
۵-۴ تحلیل مدارهای الکتریکی به کمک تبدیل لاپلاس ۱۶۸
۵- انتگرال کانولوشن و تبدیل لاپلاس کانولوشن ۱۷۳
۵-۵ کانولوشن دو تابع $f_1(t)$ و $f_2(t)$ را همانطور که اشاره شد بصورت زیر بیان می‌کنیم: ۱۷۳
خلاصه فصل: ۱۷۷

فصل ششم: فرکانس‌های طبیعی و تابع شبکه

۶-۱ فرکانس‌های طبیعی یک متغیر شبکه ۱۸۹
۶-۲ روش‌های بدست آوردن فرکانس‌های طبیعی یک متغیر شبکه ۱۸۹
۶-۳ فرکانس‌های طبیعی یک شبکه ۱۹۴
۶-۴ تعداد فرکانس‌های طبیعی شبکه ۱۹۵
۶-۵ حذف یا نگهداشتن فرکانس‌های طبیعی برای یک متغیر شبکه ۲۰۲
۶-۶ فرکانس طبیعی مدار باز و اتصال کوتاه ۲۰۴
خلاصه فصل ۲۰۵

فصل هفتم: توابع شبکه

۷-۱ پاسخ فرکانسی ۲۲۳
۷-۲ فیلترها ۲۳۰
۷-۲-۱ فیلتر پائین‌گذر ۲۳۱
۷-۲-۲ فیلتر بالاگذر ۱۳۱
۷-۲-۳ فیلتر میان‌گذر ۲۳۱
۷-۲-۴ فیلتر میان‌گذر ۲۳۴
۷-۲-۵ فیلتر تمام‌گذر ۲۳۴
۷-۳ رابطهٔ بین دیاگرام صفرها و قطب‌ها با پاسخ ضربه و منحنی اندازه ۲۳۶
۷-۴ صفرهای تابع شبکه ۲۳۷
خلاصه فصل ۲۴۴

فصل هشتم: قضایای شبکه

۸-۱ قضیه تونن و نورتن ۲۵۵

۸-۲ قضیه جمع آثار ۲۵۵
۸-۳ قضیهٔ جانشینی ۲۵۶
۸-۴ قضیه هم‌پاسخی ۲۵۶
۸-۵ قضیه تلگان ۲۵۸
خلاصه فصل ۲۶۱

فصل نهم: مدارهای دو دریچه‌ایی (دو قطبی‌ها)

۹-۱- ماتریس امپدانس (Z) ۲۷۲
۹-۲ ماتریس ادمیتانس (Y) ۲۷۳
۹-۳ ماتریس هایبرید (G,H) ۲۷۶
۳-۱- ماتریس هایبرید نوع اول (H) ۲۷۶
۹-۳-۲ ماتریس هایبرید نوع دوم (G) ۲۷۷
۹-۴ ماتریس انتقال (T',T) ۲۷۸
۹-۴-۱ ماتریس انتقال نوع اول (T) ۲۷۸
۹-۴-۲ ماتریس انتقال نوع دوم (T') ۲۸۰
۹-۵- رابطهٔ بین پارامترهای ماتریس‌های یک دو قطبی ۲۸۱
۹-۶- دو قطبی‌های متقارن و متقابل ۲۸۲
۹-۷- اتصال دو قطبی‌ها ۲۸۳
۹-۷-۱- اتصال سری (ورودی‌ها سری- خروجی‌ها سری) ۲۸۴
۷-۲-۲ - اتصال موازی (ورودی‌ها موازی – خروجی‌ها موازی) ۲۸۵
۹-۷-۳ -اتصال سری – موازی (ورودی‌ها سری- خروجی‌ها موازی) ۲۸۶
۹-۷-۴- اتصال موازی – سری (ورودی‌ها موازی – خروجی‌ها سری) ۲۸۷
۹-۷-۵- اتصال متوالی ۲۸۸
خلاصه فصل ۲۹۰

فصل دهم: گرافها و کاربرد آنها در تجزیه و تحلیل مدارها

۱۰-۱ تعاریف ۳۱۱
۱۰-۲ تجزیه و تحلیل مدارهای الکتریکی بوسیلهٔ گراف‌ها ۳۱۳
۱۰-۲-۱ تعاریف مرتبط با تجزیه و تحلیل مدارات بوسیله گراف‌ها ۳۱۴
۱۰-۲-۱-۲ تعریف کات ست ۳۱۵
۱۰-۲-۱-۳- ماتریس تلاقی گره با شاخه ۳۱۶
۱۰-۲-۱-۴ ماتریس تلاقی شاخه با مش ۳۱۷
۱۰-۲-۱-۵- ماتریس حلقه اساسی ۳۱۹
۱۰-۲-۲ روش تجزیه و تحلیل مش ۳۲۴
۱۰-۲-۳ روش تجزیه و تحلیل حلقه ۳۲۵
۱۰-۲-۴ روش تجزیه و تحلیل کات‌ست ۳۲۶
۱۰-۳ دوگان ۳۲۷
خلاصه فصل ۳۳۰

فصل یازدهم: مدارهای غیرخطی، تقویت کننده‌های عملیاتی (OP-Amp) و شبکه‌های خاص

۱۱-۱ دیود ۳۳۹
۱۱-۲ ترکیب عناصر مختلف با دیود ۳۳۹
۱۱-۳ تقویت‌کننده‌های عملیاتی (**OpAmp=Operational Amplifier**) ۳۴۱
خلاصه فصل ۳۴۷

فصل اول

المان‌های مدار

عناوین اصلی

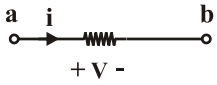
- مقاومت
- قوانین کیرشهف
- خازن
- سلف
- منابع
- روش‌های تحلیل مدارهای الکتریکی
- قضایای تونن و نورتن
- توان

فصل اول

المان‌های مدار

۱-۱ مقاومت

مقاومت یک المان دو سر است که رابطه ولتاژ وجریان در آن به صورت زیر می‌باشد.



$$R = \frac{V}{I} \text{ یا } I = \frac{V}{R} \text{ یا } V = I \times R$$

G هدایت الکتریکی (conductance) می‌باشد. و برحسب مُهُوُ ($\mho$) بیان می‌شود. و رابطه زیر را با مقاومت الکتریکی (Resistance) که واحدش اهم (Ω) می‌باشد دارد:

$$R = \frac{۱}{G}$$

مقاومت‌ها معمولاً به سه صورت زیر بیان می‌شوند:

۱- خطی و تغییرناپذیر با زمان $V = RI$

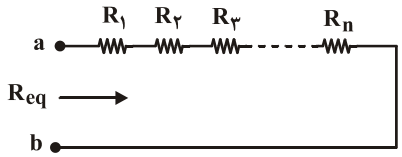
۲- خطی و تغییرپذیر با زمان $V(t) = R(t)I(t)$

۳- غیرخطی $V = f(I)$

اتصال مقاومت‌ها:

الف) اتصال سری مقاومت‌ها

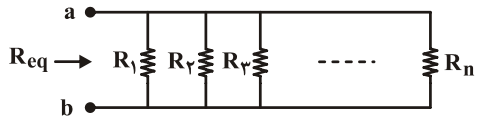
اگر n مقاومت را بصورت سری به یکدیگر وصل کنیم، مقاومت معادل آنها بصورت زیر محاسبه می‌گردد:



$$R_{eq} = R_۱ + R_۲ + R_۳ + \cdots + R_n$$

ب) اتصال موازی مقاومت‌ها

اگر n مقاومت را بصورت موازی به یکدیگر وصل کنیم، مقاومت معادل آن‌ها بصورت زیر محاسبه می‌گردد:



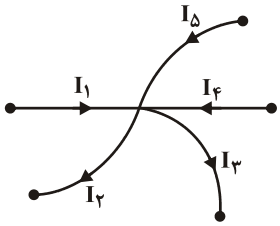
$$R_{eq} = R_۱ \| R_۲ \| R_۳ \| \cdots \| R_n = \frac{۱}{\frac{۱}{R_۱} + \frac{۱}{R_۲} + \frac{۱}{R_۳} + \cdots + \frac{۱}{R_n}}$$

۱-۲ قوانین کیرشهف

قانون جریان کیرشهف (KCL):

جمع جبری جریان‌های ورودی به یک گره[۱] در یک مدار برابر صفر است.

← $\sum_j i_j = ۰$ جریان وارد شونده به گره (-) و جریان خارج‌شونده ازگره (+)



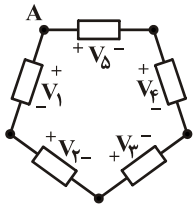
$$\begin{cases} -I_۱ + I_۲ + I_۳ - I_۴ - I_۵ = ۰ \\ I_۱ + I_۴ + I_۵ = I_۲ + I_۳ \end{cases}$$

لذا مجموع جریان‌های واردشده به یک گره با جمع همه‌ی جریان‌های خارج شده برابر است.

قانون ولتاژ کیرشهف (KVL):

جمع جبری ولتاژهای شاخه‌های هر حلقه‌ای از مدار برابر صفر است.

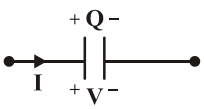
← علامت ولتاژ برابر علامت سر ابتدایی: یعنی اگر ابتدا به سر + یک ولتاژ برسیم، آنرا مثبت فرض می‌کنیم.



$$\sum_j v_j = ۰$$
$$v_۱ + v_۲ + v_۳ - v_۴ - v_۵ = ۰$$

۱-۳ خازن

یک المان دو سر که رابطه بین ولتاژ و بار الکتریکی دو سر آن بصورت زیر می‌باشد.



$$C = \frac{Q}{V}$$

۱ گره محل تلاقی دو یا چند شاخه

خازن‌ها را می‌توان به سه صورت زیر در کلیه‌ی مدارها یافت:

۱- خطی و تغییرناپذیر با زمان $V_C(t) = V_c(\circ) + \frac{1}{C}\int_{\circ}^{t} i_C(t_\circ).dt$

۲- خطی و تغییرناپذیر با زمان $C(t) = \frac{Q(t)}{V(t)}$

۳- غیرخطی $Q = f(V) \leftarrow$

باتوجه به اینکه رابطه جریان و بار الکتریکی به صورت زیر است با جایگذاری داریم:

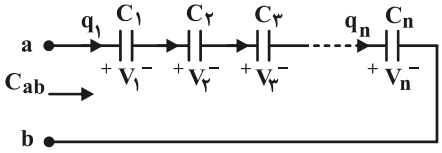
برای خطی و تغییرپذیر با زمان $I = \frac{dQ}{dt} \xrightarrow{\text{در حالت ۲}} I = \frac{d[c(t)v(t)]}{dt} = c(t)\frac{dv(t)}{dt} + v(t)\frac{dc(t)}{dt}$

برای غیرخطی $I = \frac{dQ}{dt} \xrightarrow{\text{در حالت ۳}} I = \frac{df(v)}{dt} = \frac{dv}{dt}.\frac{df(v)}{dv} \leftarrow$

اتصال خازن‌ها:

الف) اتصال سری خازن‌ها

اگر n خازن را بصورت سری به یکدیگر وصل کنیم، خازن معادل آنها و رابطهٔ بین بار الکتریکی و ولتاژ خازن‌ها بصورت زیر بیان می‌شود:



$$q_{ab} = q_1 = q_2 = q_3 = \cdots = q_n$$
$$v_{ab} = v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_n$$

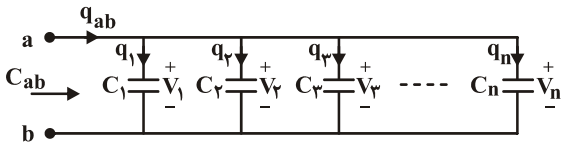
باتوجه به این روابط برای خازن معادل دو سر a و b می‌توانیم رابطه زیر را اثبات کنیم.

$$\frac{1}{C_{ab}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \cdots + \frac{1}{C_n}$$

دقت کند بار الکتریکی معادل جریان می‌باشد.

ب) اتصال موازی خازن‌ها

اگر n خازن را بصورت موازی به یکدیگر وصل کنیم، می‌توانیم روابط زیر را برای آنها بیان کنیم:



$$\left.\begin{aligned} q_{ab} &= q_1 + q_2 + q_3 + \cdots + q_n \\ v_{ab} &= v_1 = v_2 = v_3 = \cdots = v_n \end{aligned}\right\} \rightarrow C_{ab} = C_1 + C_2 + C_3 + \cdots + C_n$$

باتوجه به شکل بایستی ولتاژ اولیه خازن‌ها با هم برابر باشد، در غیر اینصورت روابط زیر را می‌توانیم برای ولتاژ خازن بیان کنیم:

طبق اصل بقای بار الکتریکی داریم:

$$V_{ab}(\circ^+)=\frac{\sum_{i=1}^{n} q_i(\circ^-)}{\sum_{i=1}^{n} C_i}=\frac{\sum_{i=1}^{n} C_i v_i(\circ^-)}{C_{ab}}$$

$q_i(\circ^-)$: بار الکتریکی خازن iام قبل از اتصال

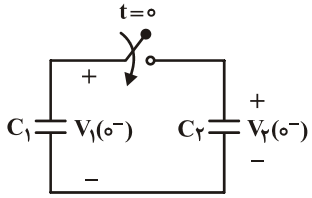
$v_{ab}(\circ^+)$: ولتاژ دو سر a و b بعد از اتصال خازن‌ها

مثال

ولتاژ خازن‌های C_1 و C_2 قبل از وصل کلید به ترتیب ۳و۴ ولت می باشد. مطلوبست محاسبهٔ:

الف- ولتاژ دو سر خازن‌های C_1 و C_2 بعد از اتصال کلید

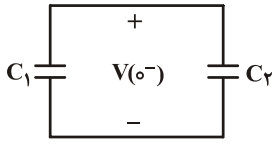
ب- مجموع بارهای ذخیره‌شده در سیستم قبل و بعد از اتصال کلید



$$C_1=1^f \quad V_1(\circ^-)=3^v$$
$$C_2=2^f \quad V_1(\circ^-)=4^v$$

حل:

الف) در لحظهٔ $t=\circ$ کلید بسته می‌شود و چون دو خازن با یکدیگر موازیند ولتاژی برابر با یکدیگر در لحظهٔ $t=\circ^+$ دارند بنابراین ولتاژ خازن‌ها در لظحهٔ $t=\circ$ جهشی ناگهانی دارد. شکل مدار در لحظهٔ $t=\circ^+$ بصورت زیر بدست می‌آید.



طبق فرمول زیر که در متن درس توضیح‌داده شده می‌توانیم $V(\circ^+)$ را محاسبه کنیم.

$$V(\circ^+)=\frac{\sum_{i=1}^{n} q_i(\circ^-)}{\sum_{i=1}^{n} C_i} \rightarrow V(\circ^+)=\frac{q_1(\circ^-)+q_2(\circ^-)}{C_1+C_2}$$

$$V(\circ^+)=\frac{C_1V(\circ^-)+C_2V_2(\circ^-)}{C_1+C_2}=\frac{1\times3+2\times4}{1+2}=\frac{11}{3}$$

بنابراین می‌توانیم ولتاژ دوسر خازن‌های C_1 و C_2 در لحظهٔ $t=\circ^+$ را بصورت زیر بنویسیم:

$$V_{C_1}(\circ^+)=V_{C_2}(\circ^+)=\frac{11}{3}^v$$

ب) بارهای الکتریکی خازن‌ها قبل و بعد از وصل کلید بصورت زیر محاسبه می‌شوند

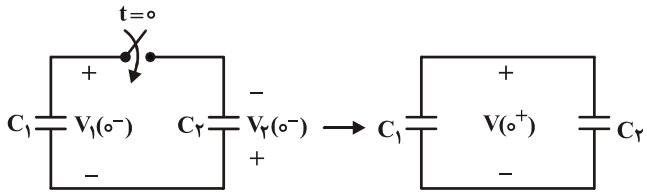
$q_T(\circ^-) = q_1(\circ^-) + q_2(\circ^-) = C_1V_1(\circ^-) + C_2V_2(\circ^-) = ۱۱$: قبل از وصل

$q_T(\circ^+) = q_1(\circ^+) + q_2(\circ^+) = C_1V_{C_1}(\circ^+) + C_2V_{C_2}(\circ^+) = ۱\times\frac{۱۱}{۳} + ۲\times\frac{۱۱}{۳} = ۱۱$: بعد از وصل کلید

که می‌توانیم رابطهٔ زیر را برای مجموع بارها قبل و بعد از وصل کلید بدست آوریم

$q_T(\circ^-) = q_T(\circ^+)$

تذکر: برای مداری بصورت زیر ولتاژ در لحظهٔ $t = \circ^+$ را بصورت رابطهٔ ارائه شده بدست می‌آوریم. مدار همان مدار صورت سوال می‌باشد ولی با پلارتیه‌های مختلف:



$$V(\circ^+) = \frac{q_1 + q_2}{C_1 + C_2} = \frac{C_1V_1(\circ^-) - C_2V_2(\circ^-)}{C_1 + C_2}$$

۱-۴ سلف

یک المان دوسر که رابطه φ و I را بصورت روبرو بیان می‌کند.

$\varphi = LI$

سلف‌ها را می‌توان مانند خازن‌ها به سه صورت زیر در مدارها یافت:

۱- خطی و تغییرناپذیر با زمان

$$V = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d(LI)}{dt} = L\frac{dI}{dt} \Rightarrow i_L(t) = i_L(\cdot) + \frac{۱}{L}\int_{\cdot}^{t} V_L^{(t)}dt$$

۲- خطی تغییرپذیر با زمان

$$V = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d(L(t)I(t))}{dt} = L(t)\frac{dI(t)}{dt}$$

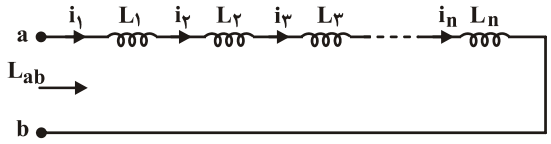
۳- غیرخطی

$$V = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{df(I)}{dt} = \frac{df(I)}{dI}.\frac{dI}{dt}$$

اتصال سلف‌ها

الف) اتصال سری سلف‌ها

اگر n سلف را بصورت سری به یکدیگر وصل کنیم، سلف معادل و روابط بین جریان و شار مغناطیسی بصورت زیر بیان می‌شوند:



$$\left.\begin{aligned} i_{ab} &= i_1 = i_2 = i_3 = \cdots = i_n \\ \phi_{ab} &= \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \cdots + \phi_n \end{aligned}\right\} \rightarrow L_{ab} = L_1 + L_2 + L_3 + \cdots + L_n$$

این روابط برای حالتی است که جریان‌های اولیهٔ کلیهٔ سلف‌ها برابر باشند. در غیر اینصورت روابط زیر را می‌توانیم بیان کنیم.

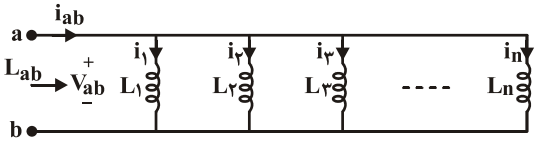
$$I_{ab}(\circ^{+}) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \phi_i(\circ^{-})}{\sum_{i=1}^{n} L_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} L_i . I_i(\circ^{-})}{\sum_{i=1}^{n} L_i}$$

$I_{ab}(\circ^{+})$: جریان عبوری از سلف‌ها بعد از اتصال سری

$I_i(\circ^{-})$: جریان عبوری از سلف iام قبل از اتصال

ب) اتصال موازی سلف‌ها

اگر n سلف را بصورت موازی به یکدیگر متصل کنیم، می‌توانیم روابط زیر را برای این سلف‌ها بدست آوریم:



$$\left.\begin{aligned} \phi_{ab} &= \phi_1 = \phi_2 = \cdots = \phi_n \\ i_{ab} &= i_1 + i_2 + i_3 + \cdots + i_n \end{aligned}\right\} \rightarrow \frac{1}{L_{ab}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} + \cdots + \frac{1}{L_n}$$

۱-۵ منابع

تقسیم‌بندی منابع

الف) از نظر نوع	**جریان**	**ولتاژ**
ب) از نظر مقدار	**مستقل**	**وابسته**
ج) از نظر شکل موج	**DC**	**AC**

🕮 **نکته:** عناصر موازی با منبع ولتاژ نادیده گرفته می‌شوند.

عناصر سری با منبع جریان نادیده گرفته می‌شوند.

باید توجه داشت که این عناصر را با رعایت شرایط زیر را می‌توان نادیده گرفت.

الف) جریان، ولتاژ و یا توان عنصر حذف‌شده را از ما نخواسته باشند.

ب) جریان عبوری در منبع ولتاژ و یا ولتاژ دو سر منبع جریان مورد سوال نباشد.

ج) توان کل مدار و یا توان داده‌شده توسط منابع مورد سوال نباشد.

۱-۶ روش های تحلیل مدارهای الکتریکی

در حالت کلی دو روش برای تحلیل مدارهای الکتریکی وجود دارد که اصول کار این دو روش طبق قوانین ولتاژ و جریان کیرشهف می‌باشد. اختلاف این دو روش به تعداد متغیرها و همچنین نوع آنها برمی‌گردد این دو روش تحلیل گره و تحلیل مش نام دارند. که در ادامه به توضیح هر یک از آنها می‌پردازیم. دقت کنید که هر دو تحلیل را برای کلیه مدارها می‌توانیم مورد استفاده قرار دهیم ولی استفاده از روشی مورد نظر است که سریعتر و با محاسبات کمتری به جواب برسد. بنابراین روشی مناسبتر می‌باشد که متغیرهای کمتری نسبت به روش دیگر داشته باشد.

۱-۶-۱ روش تحلیل گره

در این روش متغیرهای موردنظر ولتاژ گره‌ها می‌باشند. در این روش ابتدا گره‌ای را به عنوان گره مبنا (زمین مدار) درنظر می‌گیریم. گره مبنا را طوری انتخاب می‌کنیم که به طرف منفی‌مدار نزدیکتر باشد این امر به عنوان یک قانون بیان نمی‌شود بلکه برای راحتی کار و کم‌کردن محاسبات مورد استفاده قرار می‌گیرد. طبق مراحل زیر این روش را بیان می‌کنیم:

۱- گره مبنا را مشخص کرده و ولتاژ این گره را صفر درنظر می‌گیریم.

۲- گره‌های دیگر مدار را شماره‌گذاری می‌کنیم.

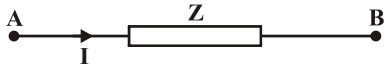
۳- ولتاژ گره‌های شماره‌گذاری شده را به عنوان متغیرهای مدار نسبت به گره مبنا بدست می‌آوریم.

۴- قانون جریان کیرشهف (KCL) را برای تمام گره‌های شماره‌گذاری اجراکرده و معادلات بدست آمده را فقط برحسب ولتاژهای گره‌های شماره‌گذاری شده بیان می‌کنیم.

۵- طبق مراحل فوق بایستی به تعداد گره‌های شماره‌گذاری شده معادله و به تعداد این معادلات نیز متغیر داشته باشیم. که طبق روش کرامر و یا هر روشی می‌توانیم این متغیرها را بدست آوریم.

نکته: در روش تحلیل گره چون از قانون **KCL** استفاده می‌کنیم بنابراین لازم است جریان کلیهٔ شاخه‌ها را بدست آوریم. اگر شاخه‌ای شامل فقط منبع ولتاژ باشد می‌توانیم کل شاخه را یک ابر گره درنظر بگیریم و ولتاژ دو گره ابتدا و انتهای منبع ولتاژ را فقط با اختلاف منبع ولتاژ شاخه بیان کنیم.

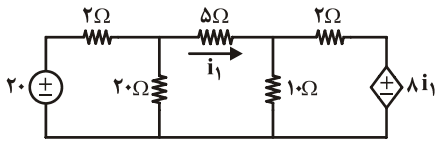
ولتاژ یک شاخه مانند شکل زیر را بصورت تفاضل ولتاژ گره‌های دو سر شاخه بیان می‌کنیم. بنابراین با تقسیم این ولتاژ به امپدانس شاخه می‌توانیم جریان شاخه را بدست آوریم.



$$I = \frac{V_A - V_B}{Z}$$

مثال

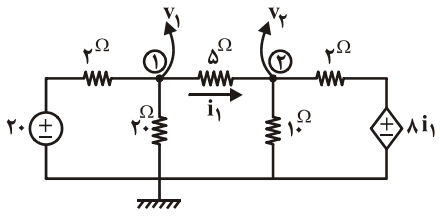
جریان i_1 را بیابید.



حل:

مراحل توضیح داده شده را برای مدار شکل بالا انجام می‌دهیم.

۱- گره مبنا، ۲- شماره‌گذاری گره‌ها، ۳- مشخص‌کردن متغیرهای مدار، ۴- نوشتن قانون جریان کیرشهف (KCL)، ۵- بدست‌آوردن متغیرهای مدار



$$KCL(۱): \frac{v_۱ - ۲۰}{۲} + \frac{v_۱}{۲۰} + \frac{v_۱ - v_۲}{۵} = ۰$$
$$KCL(۲): \frac{v_۲ - ۸i_۱}{۲} + \frac{v_۲ - v_۱}{۵} + \frac{v_۲}{۱۰} = ۰$$

دقت کنید که در دو معادلهٔ بالا جریان $i_۱$ را بایستی برحسب متغیرهای مدار (ولتاژ گره‌ها) بیان کنیم.که طبق رابطه زیر بدست خواهد آمد.

$$i_۱ = \frac{v_۱ - v_۲}{۵}$$

که با جایگذاری در معادله بالا می توانیم $v_۱$ و $v_۲$ را طبق روابط زیر بدست آوریم.

$$\begin{cases} ۱۵v_۱ - ۴v_۲ = ۲۰۰ \\ -۱۰v_۱ + ۱۶v_۲ = ۰ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v_۱ = ۱۶ \\ v_۲ = ۱۰ \end{cases} \rightarrow i_۱ = \frac{v_۱ - v_۲}{۵} = \frac{۶}{۵} = ۱/۲^{A}$$

۱-۶-۲ روش تحلیل مش

در این روش متغیرهای موردنظر برعکس روش گره که ولتاژ گره‌ها بودند، جریان حلقه‌ها می‌باشند. در این روش طبق قانون ولتاژ کیرشهف (KVL) عمل کرده و کلیه معادلات KVL را برای حلقه‌های مدار بدست می‌آوریم و طبق این معادلات جریان حلقه‌ها را محاسبه می‌کنیم. مراحل انجام این روش در زیر به طور خلاصه توضیح داده شده است:

۱- کلیه منابع جریان که موازی با عناصر مدار (بجز منابع) می‌باشند را به منبع ولتاژ تبدیل می‌کنیم.

۲- حلقه‌هایی را که بین آنها هیچ عنصری وجود ندارد را شماره‌گذاری می‌کنیم. در این مرحله دقت کنید که کلیهٔ حلقه‌ها درجهت حرکت عقربه‌های ساعت باشند.

۳- جریان شاخه‌ها برابر با مجموع جبری جریان‌هایی می‌باشد که از آن شاخه می‌گذرد که تعداد این جریان‌ها از دو جریان بیشتر نخواهد شد.

مثلاً جریان شاخه‌ای که فقط در یک حلقه قرار دارد (مثل شاخه‌های اطراف مدار) برابر جریان آن حلقه و جریان شاخه‌ای که در دو حلقه مشترک است برابر تفاضل جریان‌های آن دو حلقه می‌باشد.

۴- قانون KVL را روی کلیه حلقه‌های مدار می‌نویسیم، بطوری که متغیرهای این معادلات بدست آمده برحسب جریان‌های حلقه‌ها باشد. بنابراین لازم است که کلیهٔ متغیرهای مدار را برحسب جریان‌های حلقه‌ها بنویسیم.

۵- با استفاده از این روش به یک دستگاه n معادله‌ای و n مجهولی می‌رسیم که n تعداد مش‌ها می‌باشد. با حل این دستگاه به جواب می‌رسیم.

بکارگیری نکات زیر در روش تحلیل مش می‌تواند این روش تحلیل را آسانتر کند.

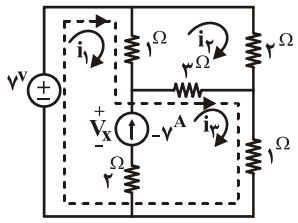
* اگر شاخه‌ای از یک منبع جریان تشکیل شده باشد اندازهٔ این منبع جریان همان جریان مش و یا تفاضل جریان مش‌هایی می‌باشد که از این منبع جریان عبور می‌کنند که این می‌تواند یکی از معادلات دستگاه مش باشد.

* اگر شاخه‌ای مانند بالا متشکل از فقط یک منبع جریان باشد، می‌توانیم با استفاده از یک KVL متشکل از دو مش شامل این منبع جریان از نوشتن روش صرف‌نظر کنیم.

باتوجه به توضیحات در مورد روش مش با استفاده از این روش می‌توانیم جریان کلیهٔ شاخه‌ها را محاسبه کنیم و از این جریان‌ها ولتاژ شاخه‌ها را نیز بدست آوریم و بنابراین مدار را تحلیل کنیم.

مثال

با استفاده از روش مش مدار زیر را تحلیل کنید و ولتاژ V_x را محاسبه کنید.



حل:

در این مثال با توجه به نکته بالا می‌توانیم معادلات زیر را استخراج کنیم.

دقت کنید بجای مش‌های ۱ و ۳ از ابرمش استفاده شده است.

$$\begin{cases} -۷ = i_۳ - i_۱ \\ KVL(۲): ۱(i_۲ - i_۱) + ۲i_۲ + ۳(i_۲ - i_۳) = ۰ \\ \text{ابر مش} \rightarrow -۷ + ۱(i_۱ - i_۲) + ۳(i_۳ - i_۲) + ۱(i_۲) = ۰ \end{cases}$$

بنابراین می‌توانیم به دستگاه زیر برسیم:

$$\begin{cases} -i_۱ + ۶i_۲ - ۳i_۳ = ۰ \\ i_۱ - ۴i_۲ + ۴i_۳ = ۷ \\ i_۱ - i_۳ = ۷ \end{cases} \rightarrow i_۱ = \frac{\begin{vmatrix} ۰ & ۶ & -۳ \\ ۷ & -۴ & ۴ \\ ۷ & ۰ & -۱ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -۱ & ۶ & -۳ \\ ۱ & -۴ & ۴ \\ ۱ & ۰ & -۱ \end{vmatrix}} = ۹^A$$

همچنین طبق این روش مقادیر $i_۲$ و $i_۳$ را می‌توانیم طبق زیر بدست آوریم:

$$i_۲ = ۲/۵^A \quad , \quad i_۳ = ۲^A$$

با استفاده از مش ۳ می‌توانیم مقدار V_x را بدست آوریم.

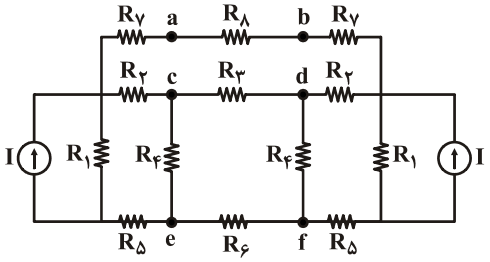
$$-V_x + ۳(i_۳ - i_۲) + ۱i_۳ + ۲ \times (-۷) = ۰$$
$$V_x = ۳(۲ - ۲/۵) + ۱ \times ۲ + (-۱۴) = -۱۳/۵^V$$

تذکر: روش‌های گره و مش روش‌هایی اصولی برای تحلیل مدارهای الکتریکی می باشند و این امر هرگز باعث نمی‌شود این دو روش را سریعترین روش برای تحلیل مدار در نظر گرفت کاربرد همزمان دو روش و استفاده از بعضی از معادلات دو روش یک مهارت جهت تحلیل مدارهای الکتریکی می‌باشد که می‌تواند در تسریع تحلیل مدار به ما کمک کند.

بعضی از شبکه‌های متقارن فقط در یک منبع اختلاف دارند که باتوجه به چند مثال می‌توانیم تحلیل آن‌ها را شرح دهیم.

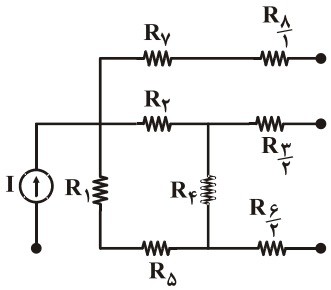
مثال

مدار شکل زیر را تحلیل کنید.

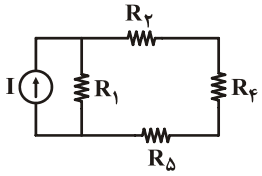


حل:

می‌توانیم مدار را بصورت زیر به دو قسمت متقارن تقسیم کنیم. چون قسمت زیر متقارن نیمه دوم می‌باشد لـذا در اثـر منبع جریان سمت چپ جریان از نقاط a به b و همچنین c به d و e به f عبور خواهدکرد.

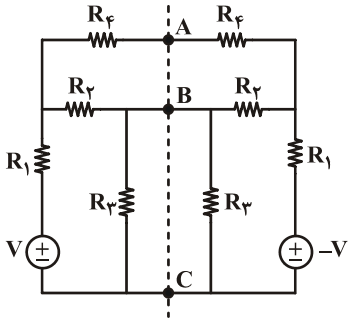


همچنین در اثر وجود منبع جریان سمت راست نیز جریان‌هایی برابر همان جریان‌ها ولی برعکس حرکت آنها از نقـاط b به a و d به c و f به e به وجود می‌آورد که درکل باعث صفرشدن جریان این شاخه‌ها خواهد شد. بنابراین مدار به شکل زیر ساده می‌شود که با تقسیم جریانی ساده این قسمت از مدار تحلیل می‌شود.



مثال

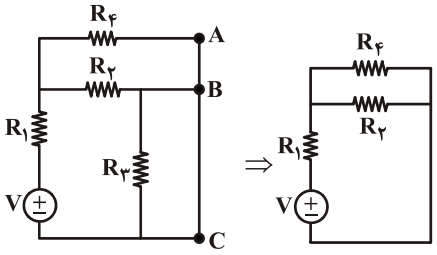
مدار شکل زیر را درنظر بگیرید و آن را تحلیل کنید.



حل:

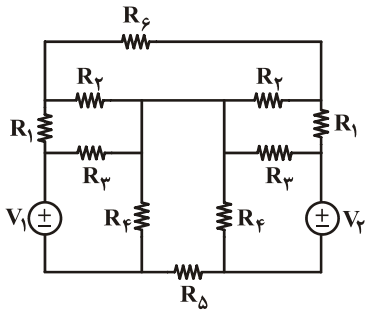
دقت کنید منابع با یکدیگر برابر ولی مختلف‌العلامه هستند. اگر ولتاژ گره A را در اثر منبع ولتاژ V برابر با v_A قرار دهـیم، ولتاژ همین گره در اثر منبع ولتاژ V- برابر با ولتاژ گره $-v_A$ خواهد شد. لذا در حالت کلی A برابر صفر خواهد شد.

بنابراین ولتاژ گره A برابر صفر خواهد شد. برای گره‌های B و C نیز همین فرآیند قابل اجراست لذا می‌توانیم مدار را بصورت زیر ساده کنیم.



مثال

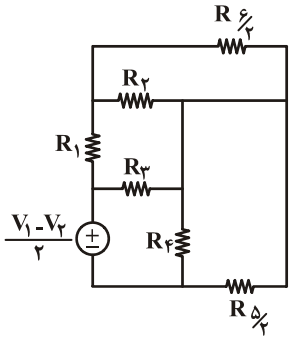
مدار شکل مقابل را تحلیل کنید.

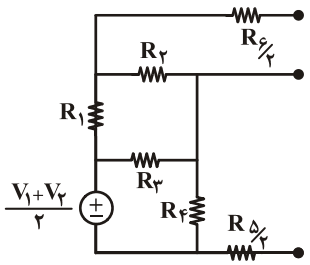


حل:

این مدار با مدارهای مثال‌های قبل کمی متفاوت است و تفاوت آن فقط در اندازه منابع می‌باشد شکل که ۲۵ روش حل آن طبق زیر انجام می‌شود.

اگر بجای $V_۱$ مقدار $\frac{V_۱+V_۲}{۲}+\frac{V_۱-V_۲}{۲}$ و بجای منبع ولتاژ $V_۲$ مقدار $\frac{V_۱+V_۲}{۲}-\frac{V_۱-V_۲}{۲}$ را قرار دهیم می‌توانیم مدار را طبق قضیه جمع آثار تحلیل کنیم. همانطور که مشخص است این مثال ترکیبی از دو مثال قبل می‌باشد. لذا می‌توانیم به دو مدار زیر تبدیل کنیم.



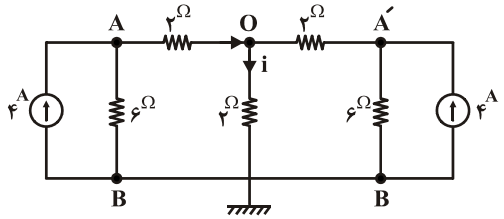


بعضی از شبکه‌های بینهایت را می‌توانیم طبق قاعدهٔ بالا تحلیل کنیم و در ادامه با ارائه چند مثال روش‌های تحلیل شبکه‌های بینهایت را توضیح می‌دهیم.

📖 **نکته:** در بعضی از مدارهای متقارن می‌توانیم شکل مدار را بصورتی ساده‌تر رسم کرده و به تحلیل مدار بپردازیم مدارهایی متقارن می‌باشند که اگر بتوانیم عنصری و یا حتی گره‌ای از مدار پیدا کنیم که اگر یک خط به صورت عمود از عنصر یا گره عبور دهیم طرف چپ و راست خط از هر نظر شبیه به هم باشند.

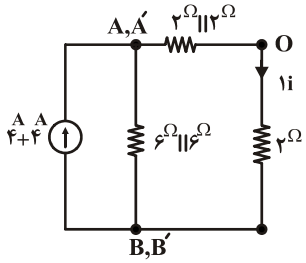
مثال

در مدار مقابل جریان i را بدست آورید.



حل:

باتوجه به شکل مدار می‌توان فهمید که مقاومت ۲ اهم عمودی همان عنصری است دو طرف آن از هر نظر یکسانند. لذا می‌توانیم مدار را بصورت زیر رسم کنیم.

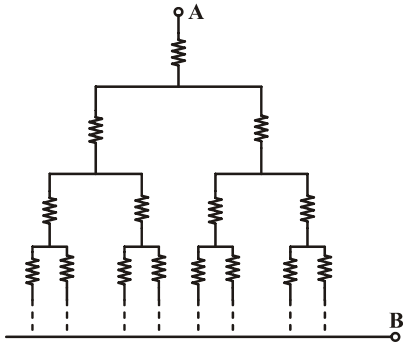


بنابراین نیمهٔ متقارن مدار را بر روی دیگری مانند شکل بالا قرار دادیم. یعنی گره A' را روی A و گره B' را روی B قرار دادیم. طبق شکل می‌توانیم جریان i را مانند زیر از یک تقسیم جریان ساده محاسبه کنیم.

$$i=(۴+۴)\times\frac{۶\|۱۶}{۲+۲\|۱۲}=۸\times\frac{۳}{۲+۱}=۴^{A}$$

مثال

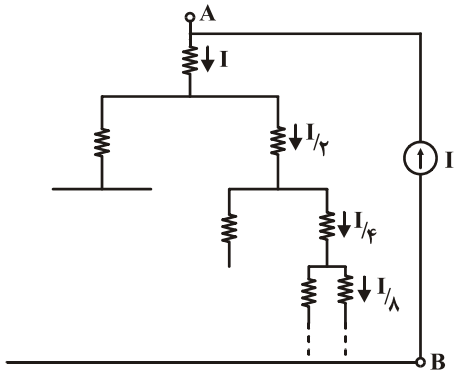
تمام مقاومت‌های شبکهٔ بینهایت شکل R هستند. مقاومت بین گره‌های A و B را بیابید.



حل:

روش اول: چون مدار متقارن است لذا اگر منبع جریانی از نقطه B به سمت A قرار دهیم. جریان از گره A به سمت گره B بصورت مساوی از بالا به سمت پائین تقسیم می‌شود. همانند شکل زیر:

در ادامه اگر ولتاژ دو سر منبع جریان را بدست آوریم و به منبع جریان I تقسیم کنیم مقاومت معادل دو سر منبع جریان بدست می‌آید.



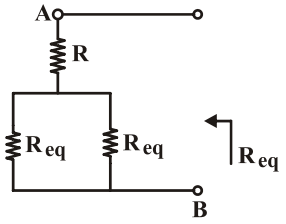
$$V_{AB} = RI + R\frac{I}{۲} + R\frac{I}{۴} + R\frac{I}{۸} + \cdots = RI(۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۸} + \cdots)$$

باتوجه به اینکه عبارت داخل پرانتز یک سری (تصاعد) هندسی می‌باشد می‌توانیم جواب را بصورت زیر بدست آوریم.

$$V_{AB} = RI(\frac{۱}{۱ - \frac{۱}{۲}}) = ۲RI \Rightarrow R_{eq} = \frac{V_{AB}}{I} = ۲R$$

روش دوم:

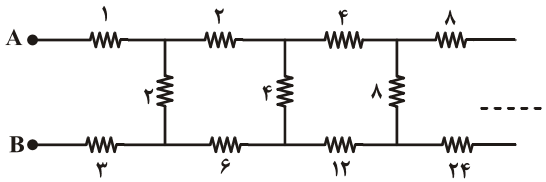
اگر دقت کنیم مدار بالا را می‌توانیم بصورت زیر رسم کنیم چون مدار بینهایت است به شکل زیر می‌رسیم.



$$R_{eq} = R + \frac{R_{eq}}{۲} \Rightarrow R_{eq} - \frac{R_{eq}}{۲} = R \Rightarrow R_{eq} = ۲R$$

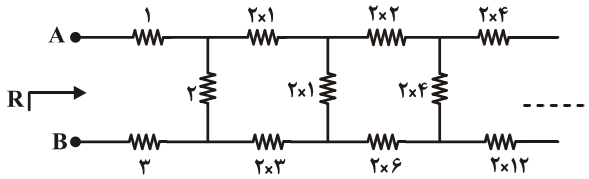
مثال

مقدار مقاومت‌های شبکهٔ نردبانی شکل زیر سه تصاعد هندسی تشکیل می‌دهند و تا بی‌نهایت ادامه دارند. مقاومت معادل دیده شده بین گره‌های A و B را بیابید.

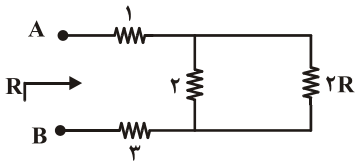


حل:

باتوجه به مدار بالا می توانیم مدار را بصورت زیر رسم کنیم.



به عبارت دیگر



مقاومت معادل بصورت زیر بدست می‌آید.

$$R = ۱ + ۲\|۲R + ۳ = ۴ + \frac{۴R}{۲R+۲} \Rightarrow R^۲ - ۵R - ۴ = ۰$$
$$\Rightarrow R = \frac{۵ + \sqrt{۴۱}}{۲}$$

نکته:

روش نردبانی: روشی که در حل بعضی از مدارها مورد استفاده قرارمی‌گیرد که جهت بدست آوردن پارامتر مجهولی مثل ولتاژ (یا جریان) از این روش استفاده می‌کنیم. که طبق دستور زیر عمل می‌کنیم.

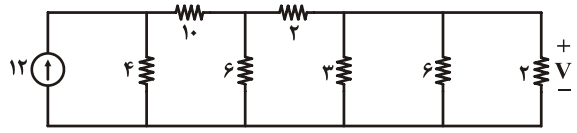
ابتدا پارامتر مجهول (ولتاژ یا جریان) را برابر یک (ولت یا آمپر) قرار می‌دهیم. سپس با نوشتن روابط KVL و KCL مقدار منبع مدار را با فرض پارامتر مجهول مشخص می‌کنیم مقدار منبع اصلی تقسیم بر مقدار منبع بدست‌آمده مقدار ضریب تصحیح می‌باشد که بایستی در عدد یک (ولت یا آمپر) ضرب شود.

- در این روش لازم نیست که پارامتر مجهول را حتماً یک قرار دهیم می‌توانیم عددی دلخواه، ولی مرتبط و مسأله ساده‌کن قراردهیم، دقت کنید که در نهایت ضریب تصحیح بدست آمده بایستی در آن عدد دلخواه ضرب شود.

$$\text{مقدار مجهول} = \text{عدد دلخواه} \times \frac{\text{منبع اصلی}}{\text{منبع بدست‌آمده}}$$

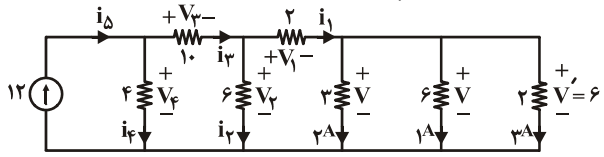
مثال

در مدار شکل زیر v را بیابید.



حل:

باتوجه به سه مقاومت موازی مقدار v را ۶ فرض می‌کنیم، (برای راحتی کار). سپس به تحلیل مدار بصورت زیر عمل می‌کنیم تا مقداری برای منبع جریان بدست آوریم.



$$i_۱ = ۲ + ۱ + ۳ = ۶^A$$
$$v_۱ = ۲ \times ۶ = ۱۲^v$$
$$v_۲ = v_۱ + v' = ۱۲ + ۶ = ۱۸^v$$
$$i_۲ = ۳^A$$

$$i_۳ = ۳^A + ۶^A = ۹^A$$
$$v_۳ = ۱۰ \times i_۳ = ۹۰^A$$
$$v_۴ = v_۳ + v_۲ = ۱۰۸^v$$
$$i_۴ = \frac{۱۰۸}{۴} = ۲۷^A$$
$$i_۵ = i_۴ + i_۳ = ۳۶^A$$

$$\text{مقدار مجهول} = \text{عدد دلخواه} \times \frac{\text{منبع اصلی}}{\text{منبع بدست آمده}}$$

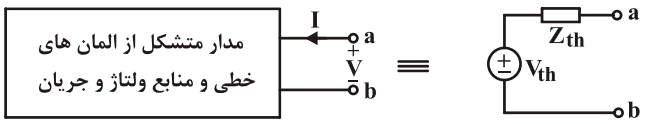
$$v = ۶^v \times \frac{۱۲}{۳۶} = ۲^v$$

۱-۷ قضایای تونن و نورتن

در تحلیل مدارهای الکتریکی اگر بخشی از مدار را بصورتی بسیار ساده بیان کنیم و معادلی برای آن درنظر بگیریم بطوری که رابطهٔ بین ولتاژ و جریان هر دو بخش با یکدیگر یکسان باشد می‌توانیم با حذف قسمت پیچیده و جایگذاری مدار ساده‌تر این معادل‌سازی را انجام دهیم. در حالت کلی برای یک شبکه متشکل از المان‌های خطی و منابع ولتاژ و جریان (چه مستقل و چه وابسته) می‌توانیم دو مدار معادل استفاده کنیم. یکی از این نوع مدار معادل‌ها، معادل تونن و دیگری معادل نورتن می‌باشد که به توضیح هر یک و روش بدست‌آوردن آنها اشاره می‌کنیم.

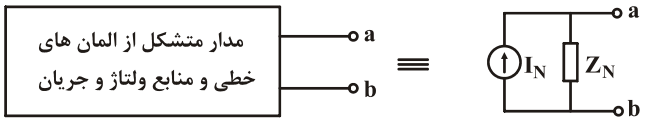
۱-۷-۱ قضیه تونن

مدار معادلی که متشکل از فقط یک مقاومت (امپدانس) سری با یک منبع ولتاژ می‌باشد را مدار معادل تونن می‌نامیم بصورت شکل زیر

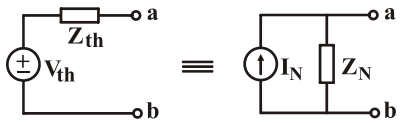


۱-۷-۲ قضیه نورتن

مدار معادلی که متشکل از فقط یک منبع جریان موازی با یک مقاومت (امپدانس) می‌باشد را مدار معادل نورتن می‌نامیم. که می‌توانیم بصورت زیر نمایش دهیم.



باتوجه به دو مدار معادل گفته‌شده حال بایستی روش‌هایی جهت بدست آوردن این دو مدار معادل بیان شود قبل از این مبحث ارتباط بین معادل‌های تونن و نورتن را بدست می‌آوریم.



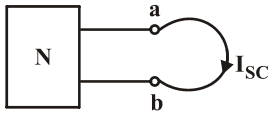
مدار معادل‌های تونن و نورتن یک مدار با یکدیگر معادلند و روابطی به شکل زیر با یکدیگر دارند.

$$I_N = \frac{V_{Th}}{Z_{Th}} \text{ یا } Z_{Th} = I_N \times Z_N \qquad Z_N V_{Th}$$

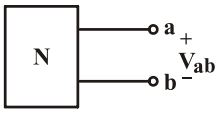
بنابراین با بدست‌آوردن فقط یک مدار معادل دیگری نیز قابل بدست آوردن می‌باشد.

🕮 **نکته:** به ولتاژ تونن، ولتاژ مدار باز **(open circuit)** نیز گفته می‌شود. همچنین به جریان نورتن نیز جریان عبوری از اتصال کوتاه **(short circuit)** گفته می‌شود.

بنابراین



$$I_N = I_{SC}$$



$$V_{Th} = V_{ab} = V_{oc}$$

حال طبق این نکته و رابطهٔ بین معادل‌های تونن و نورتن می‌توانیم کل مدار معادل تونن یا نورتن را بدست آوریم.

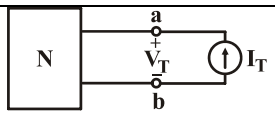
این یک روش بدست آوردن مدارهای معادل تونن و نورتن می‌باشد اما این روش برای اکثر مدارهای الکتریکی طولانی می‌باشد. روش دیگری که در بدست آوردن مدارهای معادل تونن و نورتن مورد استفاده قرار می‌گیرد. محاسبهٔ یکی از متغیرهای بالا (ولتاژ مدار باز یا جریان اتصال کوتاه) بعلاوهٔ مقاومت تونن (نورتن) می‌باشد.

جهت بدست آوردن مقاومت معادل دیده شده دو سر مدار، ابتدا کلیهٔ منابع مستقل را صفر کرده (منابع ولتاژ اتصال کوتاه و منابع جریان مدار باز) و مقاومت معادل دو سر مدار را محاسبه می‌کنیم، که این مقاومت همان مقاومت تونن می‌باشد.

روش کلی:

محاسبه V_{Th} یا I_N و R_{Th} باهم:

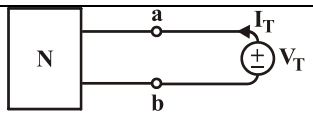
در این روش باتوجه به اینکه معادلات گره یا حلقه برای ما مهم می‌باشد لازم است منبع تستی مانند دو شکل زیر به مدار اضافه کنیم و یک رابطه خطی بین جریان و ولتاژ منبع تست بدست آوریم. در حالت کلی دو شکل زیر را می‌توانیم معادل‌سازی کنیم.



$$I_T = \frac{1}{\alpha} V_T + \gamma$$

- جهت بدست‌آوردن مدار معادل نورتن
- معادلهٔ گره در ورودی نوشته می‌شود.

$$\alpha = R_N$$
$$\gamma = I_N$$



$$V_T = \alpha I_T + \beta$$

- جهت بدست‌آوردن مدار معادل تونن
- معادلات حلقه برای ما مهم می‌باشد.

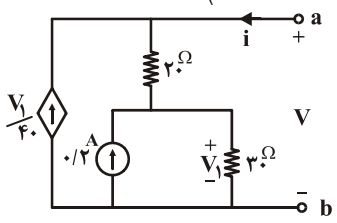
$$\alpha = R_{Th}$$
$$\beta = V_{Th}$$

🕮 **نکته:** اگر مداری منابع مستقل نداشته باشد، $V_{Th} = I_N = 0$ می‌باشد.

مثال

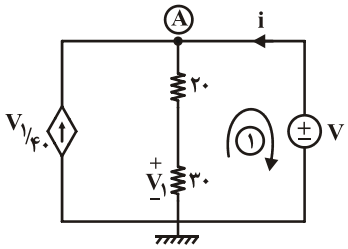
مقاومت تونن از دیدگاه دو نقطه a و b در مدار شکل زیر چند اهم است؟ (سراسری ۶۸-۶۷)

۱) ۱۰۰ ۲) ۲۰۰ ۳) ۳۰۰ ۴) ۴۰۰



حل:

چون سوال از ما فقط مقاومت تونن را خواسته، لذا کافی است منابع مستقل مدار را صفر کرده و سپس با بدست‌آوردن رابطهٔ بین ولتاژ V و جریان i مقاومت تونن را محاسبه کنیم. بنابراین مدار بصورت زیر درمی‌آید:



$$KCL(A): -\frac{V_1}{۴۰}+\frac{V_1}{۳۰}-i=۰\rightarrow i=\frac{V_1}{۱۲۰}$$

$$KVL(1): -V_1+۲۰(-\frac{V_1}{۲۰})+V=۰\rightarrow V=\frac{۵}{۳}V_1$$

چون هدف ما بدست‌آوردن رابطهٔ بین V و i می‌باشد بنابر دو رابطهٔ بالا می‌توانیم معادلهٔ زیر را بدست آوریم:

$$i=\frac{۱}{۱۲۰}\times(\frac{۳}{۵}V)\Rightarrow V=۴۰\times۵i=۲۰۰i=R_{th}i$$

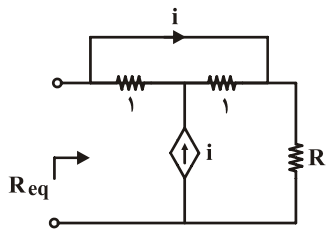
بنابراین گزینه ۲ صحیح است.

مثال

در شبکه زیر R_{eq} برابر است با:

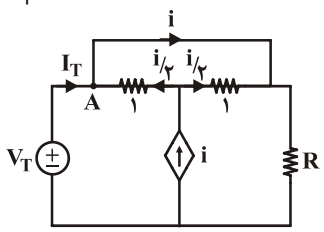
۱) $۲R$ ۲) $۳R$

۳) $\frac{R}{۲}$ ۴) $\frac{R}{۳}$



حل:

ابتدا منبع ولتاژ V_T با جریان I_T را طبق شکل زیر به مدار اضافه می‌کنیم و رابطهٔ بین V_T و I_T را بدست می‌آوریم.



با کمی دقت می‌توان فهمید که مقاومت‌های یک اهمی با یکدیگر موازیند لذا ولتاژها و جریان‌هایی برابر دارند بنابراین منبع جریان وابسته بصورت مساوی بین دو مقاومت تقسیم می‌شود. با نوشتن KCL از گره A می‌توانیم رابطهٔ بین جریان‌هـای i و I_T را بدست آوریم. همچنین با کمی دقت می‌توان فهمید که ولتاژ مقاومت R همان V_T می‌باشد بنابراین

$$KCL(A):\ I_T+\frac{i}{2}-i=0\rightarrow I_T=\frac{i}{2}$$

$$KVL:\ -V_T+R(i+\frac{i}{2})=0\rightarrow V_T=\frac{3}{2}Ri$$

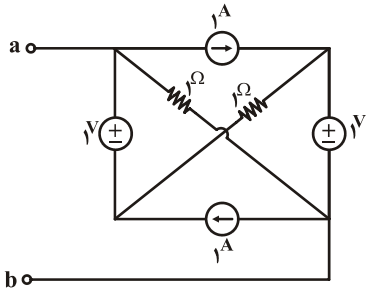
بنابراین مقاومت R_{eq} را از رابطهٔ زیر بدست می‌آوریم:

$$R_{eq}=\frac{V_T}{I_T}=3R$$

لذا گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

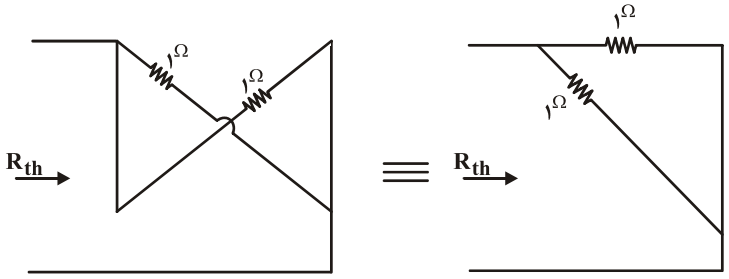
مثال

معادل تونن شبکه شکل زیر را بیابید.



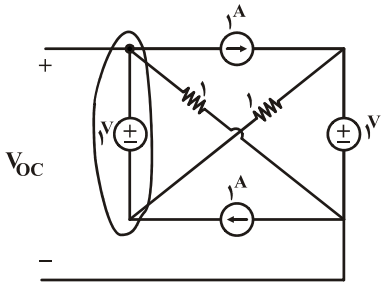
حل:

روش اول: ابتدا مقاومت تونن را طبق شکل زیر که در آن کلیهٔ منابع صفر قرار داده شده است بدست می‌آوریم:



$$R_{Th}=1\|1=0/5^{\Omega}$$

برای محاسبه ولتاژ تونن طبق شکل زیر با نوشتن KCL در ابر گره A شروع می‌کنیم.



$$KCL(A):\ 1+\frac{V_{oc}}{1}-1+\frac{V_{oc}-1-1}{1}=0\ \rightarrow\ V_{oc}=1$$