

دانش اگر در ثریا هم باشد مردمانی از سرزمین پارس بر آن دست خواهند یافت.

پیامبر اعظم (ص)

شرح جامع

سیستم های کنترل خطی

«مهندسی برق»

مولف: امیر حسین محمد زاده نیاکی

انتشارات ارشد

پیشگفتار ناشر

خداوند بزرگ را شاکریم که فرصتی عنایت فرمود تا بتوانیم قدمی در جهت گسترش علم و فرهنگ کشور عزیزمان برداریم و مسیری هموار را در اختیار مخاطبان و داوطلبان علاقمند به ادامه تحصیل قرار دهیم. از آنجائی که درحوزه کتاب‌های درسی و کمک درسی کارشناسی ارشد کتاب‌های زیادی به رشته تحریر در آمده است با این حال وجود یک مجموعه جامع، دقیق، کامل و دارای رفرنس(منابع) مستند احساس می‌شود.

همیشه دغدغه داشتیم که ای کاش می‌شد تمامی منابع پراکنده و گاهاً دست نایافتنی کنکور در یک مجموعه به گونه‌ای جذاب و شیوا آماده می‌شد و همچنین سوالات دوره‌های قبل کنکور نیز به گونه‌ای تشریحی پاسخ داده می شدند، که خدشه‌ای بر آنها وارد نشود و خیال داوطلبان عزیز آنقدر آسوده باشد که اطلاعات مندرج در پاسخنامه‌ها را برای بهره‌گیری در آزمون خود بکار گیرند. این کار با یاری خداوند بزرگ و همکاری نخبه‌ترین دانشجویان و اساتید کشور در انتشارات ارشد هماهنگ گردید و در تمامی مقاطع تحصیلی از کاردانی به کارشناسی، کارشناسی ارشد و دکتری در حوزهٔ آزمون‌های سراسری – آزاد و پیام نور بسته‌های آموزشی شامل کتاب‌های بانک سوالات و کتاب‌های شرح جامع درس آماده گردید. در تهیه مجموعه‌های فوق‌الذکر از فارغ‌التحصیلان کارشناسی ارشد و دکتری که حائز رتبه‌های تک رقمی کنکور می‌باشند، استفاده کرده‌ایم، تا شما عزیزان بتوانید در راستای افزایش توان علمی خود در جهت نیل به مقصود خویش نایل آیید. بدون تردید می‌توان گفت که برای اولین بار در نظام آموزشی کشور مجموعه‌ای به این سبک عرضه می‌شود که در کیفیت و کمیت بی‌نظیر بوده و تمامی نیازهای دانشجویان داوطلبان عزیز را پوشش داده است. امید است که استفاده از این مجموعه عزیزان را در جهت موفقیت در آزمون یاری رسانده باشد. در پایان لازم به ذکر است که بی نقصی محض از آن خداوند متعال می‌باشد، بنا براین از تمامی خوانندگان و داوطلبان عزیز خواهشمندیم نظرات سازنده خود را در مورد این کتاب به سایت انتشارات ارشد اعلام نمایند تا ما را در جهت هر چه بهتر آماده کردن این محصولات یاری رسانند.

با تشکر

ناشـــــر

www.arshadbook. ir

پیشگفتار مولف

درس سیستم‌های کنترل خطی از جمله دروس پایه‌ای و اساسی برای دانشجویان رشته‌های مهندسی برق (خصوصاً گرایش کنترل)، مهندسی مکانیک و مهندسی هسته‌ای می‌باشد. بنابراین تسلط بر مطالب این درس، یادگیری نکات آن و نحوه پاسخگویی به سؤالات و تست‌های آن بسیار حائز اهمیت می‌باشد.

تاکنون کتابهای زیادی در مورد سیستم‌های کنترل توسط اساتید این رشته (مانند اوگاتا، درف، بیشاپ و غیره) تألیف شده است که به عنوان مرجع اصلی این درس در دانشگاه‌های مختلف در نظر گرفته می‌شوند (لیست مراجع اصلی در انتهای این کتاب آورده شده است). بسیاری از این کتابها تمامی سرفصل‌های مباحث مربوطه را در بر دارند. اما بیشتر این کتابها به صورت متن درسی تهیه شده‌اند و در برخی موارد دارای مباحث جنبی بسیاری می‌باشند که در نتیجه بخش زیادی از این کتابها در دانشگاه‌ها تدریس نشده و مورد ارزیابی قرار نمی‌گیرند.

در کتاب حاضر سعی مؤلف بر این بوده که از هر یک از مراجع معرفی شده، قسمتهایی را که به خوبی مورد بررسی قرار داده ذکر نماید و نکاتی را که در مراجع به صورت صریح و مشخص ذکر نشده و نیز نکاتی را که خود مؤلف به تجربه به دست آورده است به آنها اضافه نماید. پس از بیان مباحث اصلی و ذکر نکات مربوط به هر بخش، به منظور تسلط دانشجو بر مطالب و فراگیری نکات مورد نظر، تعدادی تست و مسأله ارائه شده و روش حل آنها بیان می‌گردد. همچنین در انتهای هر فصل، مسائل و تست‌های زیادی در ارتباط با مطالب آن فصل به همراه پاسخ آنها وجود دارد. پاسخ‌های ارائه شده به گونه‌ای است که در عین ساده و کوتاه بودن، دارای توضیحات کافی بوده و موجب سردرگمی دانشجو نخواهد شد.

این کتاب علاوه بر اینکه به منظور آمادگی دانشجویان برای آزمون کارشناسی ارشد کاملاً مفید و راهگشا می‌باشد، می‌تواند به عنوان یک منبع کمک درسی و به منظور تسلط دانشجویان بر مطالب درس سیستم‌های کنترل خطی نیز مورد استفاده قرار گیرد. بدون شک نظرات شما عزیزان در جهت رفع نواقص و بهبود کیفیت این کتاب مؤثر و کارساز خواهد بود.

در انتها برخود لازم می‌دانم از کمک‌های بی‌شائبه خانم الهه اسدی در ویرایش کتاب و همکاری مسئولین محترم «انتشارات ارشد» در چاپ و تدوین این مجموعه تشکر و قدردانی نمایم.

با سپاس

امیرحسین محمدزاده نیاکی
a.mohammadzadeh@ece.ut.ac.ir

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

پیشگفتار ناشر ۳
پیشگفتار مؤلف ۴

فصل اول: تبدیل لاپلاس

۱- مقدمه ۱۱
۲- تعریف تبدیل لاپلاس ۱۱
۳- ویژگی ها وقضایای تبدیل لاپلاس ۱۳
۴- عکس تبدیل لاپلاس ۱۳
۵- دو قضیه بسیار کاربردی ۱۵

فصل دوم: سیستمهای کنترل

۱- سیستم کنترل حلقه باز ۲۱
۲- سیستم کنترل حلقه بسته ۲۱
۳- دیاگرام بلوکی ۲۳
۴- ساده کردن دیاگرام بلوکی ۲۴

فصل سوم: قاعده میسون (Signal Flow Graph :SFG)

۱- گراف گذر سیگنال ۳۳
۲- قاعده میسون ۳۴

فصل چهارم: مدل‌سازی سیستم‌های فیزیکی

۱- سیستم های الکتریکی ۴۹
۲- تابع تبدیل پتانسیومتر: ۴۹
۳- سیستم های مکانیکی انتقالی ۵۱
۴- سیستم‌های مکانیکی دورانی ۵۴
۵- سیستم‌های سیالی (سیستم‌های سطح مایع) ۵۶
۶- سیستم‌های حرارتی ۵۸

فصل پنجم : صفرها و قطب‌های تابع تبدیل سیستم

۱- مقدمه ۶۷
۲- مرتبه یک قطب ۶۷

عنوان **صفحه**

فصل ششم: حساسیت

۱- مقدمه ۷۷
۲- تعریف حساسیت ۷۷

فصل هفتم: معیار پایداری روث

۱- مقدمه ۸۷
۲- معیار پایداری روث ۸۷

فصل هشتم: خطای حالت ماندگار

۱- نوع سیستم ۱۰۹
۲- ثابت خطای موقعیت (وضعیت) ۱۱۰
۳- ثابت خطای سرعت ۱۱۰
۴- ثابت خطای شتاب ۱۱۱

فصل نهم: تحلیل پاسخ گذرا

۱- سیستم های مرتبه اول ۱۲۹
۲- پاسخ پله سیستم مرتبه اول ۱۲۹
۳- پاسخ شیب سیستم مرتبه اول ۱۳۰
۴- پاسخ ضربه سیستم مرتبه اول ۱۳۰
۵- سیستم های مرتبه دوم ۱۳۰
۶- پاسخ پله سیستم های مرتبه دوم ۱۳۱
۷- مشخصات پاسخ گذرا ۱۳۲
۸- مکان های ثابت ۱۳۴
۹- پاسخ ضربه سیستم مرتبه دوم ۱۳۵

فصل دهم: مکان هندسی ریشه‌ها

۱- مقدمه ۱۵۱
۲- شرط زاویه و فاز ۱۵۱
۳- قواعد کلی رسم مکان هندسی ریشه‌ها ۱۵۲
۴- حساسیت محل ریشه‌ها برحسب k ۱۵۴

فصل یازدهم: منحنی‌های بودی

۱- مقدمه ۱۷۷
۲- عوامل پایه‌ای ۱۷۷
۳- فرکانس تشدید (wr) و قله تشدید (Mr) ۱۸۲
۴- روش عمومی رسم منحنی‌های بودی ۱۸۳
۵- سیستم‌های مینیمم فاز و غیر مینیمم فاز ۱۸۵

فصل دوازدهم: معیار پایداری نایکوئیست

۱- پاسخ فرکانسی ۱۹۹

عنوان **صفحه**

۲- نمودارهای قطبی ۱۹۹
۳- عوامل انتگرال‌گیر و مشتق‌گیر ۲۰۰
۴- عوامل مرتبه اول ۲۰۰
۵- عوامل مرتبه دوم ۲۰۱
۶- معیار پایداری نایکوئیست ۲۰۴
۷- قضیه نگاشت ۲۰۶
۸- معیار نایکوئیست ۲۰۶
۹- تعیین پایداری سیستم‌های چندحلقه‌ای با استفاده از معیار نایکوئیست ۲۰۷

فصل سیزدهم: حد فاز و حد بهره

۱- مقدمه ۲۱۳
۲- فرکانس قطع فاز ۲۲۹
۳- حد فاز (Phase Margin) ۲۲۹
۴- حد بهره (Gain Margin) ۲۲۹
۵- پایداری سیستم‌های کنترل دارای تأخیر ۲۳۰
۶- پاسخ فرکانسی حلقه بسته ۲۳۲
۷- مکان هندسی اندازه ثابت (دایره‌های M) ۲۳۳
۸- مکان هندسی فاز ثابت (دایره‌های N) ۲۳۴

فصل چهاردهم: فضای حالت

۱- مقدمه ۲۵۱
۲- تعاریف ۲۵۱
۳- نمایش فضای حالت سیستم‌ها ۲۵۱
۴- دیاگرام حالت ۲۵۴
۵- تعیین معادلات حالت از روی تابع تبدیل سیستم ۲۵۶
۶- تعیین تابع تبدیل از وری معادلات حالت ۲۶۰
۷- حل معادلات حالت ۲۶۰
۸- ماتریس انتقال حالت (STM) ۲۶۱
۹- ماتریسی انتقال حالت (STM) ۲۶۲
۱۰- طراحی با روش جایدهی قطب‌ها (Pole Placement) ۲۶۳

فصل پانزدهم:کنترل کننده‌ها

۱- مقدمه ۲۷۷
۲- کنترل‌کننده تناسبی مشتقی (PD) ۲۷۷
۳- کنترل‌کننده تناسبی انتگرالی (PI) ۲۷۸
۴- کنترل‌کننده PID ۲۷۹
۵- کنترل‌کننده پیش‌فاز (Lead) ۲۷۹
۶- کنترل‌کننده پس‌فاز (Lag) ۲۸۰

فصل اول

تبدیل لاپلاس

عناوین اصلی

- مقدمه
- تعریف تبدیل لاپلاس
- ویژگی ها وقضایای تبدیل لاپلاس
- عکس تبدیل لاپلاس
- دو قضیه بسیار کاربردی

فصل اول

تبدیل لاپلاس

۱- مقدمه

روش تبدیل لاپلاس یک روش عملیاتی است که کاربرد آن در حل معادلات دیفرانسیل خطی مزایای زیادی دارد. با استفاده از تبدیل لاپلاس می توان بسیاری از توابع متداول ، مانند توابع سینوسی ، سینوسی میرا ، نمایی و ... را به توابعی جبری از یک متغیر مختلط تبدیل کرد.

یکی از مزایای روش تبدیل لاپلاس ، استفاده از آن در روشهای ترسیمی برای پیش بینی عملکرد سیستم ، بدون حل واقعی معادلات دیفرانسیل حاکم بر سیستم می باشد. به علاوه مزیت دیگر این روش این است که با حل معادله دیفرانسیل ، مؤلفه های گذرا و حالت ماندگار به صورت یکجا محاسبه می شوند.

۲- تعریف تبدیل لاپلاس

تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ (که برای $t<0$ ، $f(t)=0$ است) به این صورت تعریف می شود:

$$L\left[f(t)\right]=F(s)=\int_{0}^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt$$

که در این رابطه $F(s)$، تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ می باشد.

در جدول زیر تبدیل لاپلاس های توابع زمانی متداول در تحلیل سیستم های کنترل خطی آورده شده است. البته برای گرفتن تبدیل لاپلاس یا محاسبه لاپلاس معکوس توابع پیچیده تر ، بایستی در ابتدا آنها را به صورت توابع نشان داده شده در جدول درآورد و از آنها استفاده نمود.

جدول زوجهای تبدیل لاپلاس

	$f(t)$	$F(s)$
۱	$\delta(t)$	1
۲	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
۳	t	$\frac{1}{s^2}$
۴	$t^n \ (n=1,2,3,...)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
۵	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$

ادامه جدول زوجهای تبدیل لاپلاس

	$f(t)$	$F(s)$
۶	$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
۷	$\frac{1}{a}\left(1-e^{-at}\right)$	$\frac{1}{s(s+a)}$
۸	$\frac{1}{b-a}\left(e^{-at}-e^{-bt}\right)$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$
۹	$\frac{1}{b-a}\left(be^{-bt}-ae^{-at}\right)$	$\frac{s}{(s+a)(s+b)}$
۱۰	$\frac{1}{ab}\left[1+\frac{1}{a-b}\left(be^{-at}-ae^{-bt}\right)\right]$	$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$
۱۱	$\frac{1}{a^2}\left(1-e^{-at}-ate^{-at}\right)$	$\frac{1}{s(s+a)^2}$
۱۲	$\frac{1}{a^2}\left(at-1+e^{-at}\right)$	$\frac{1}{s^2(s+a)}$
۱۳	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
۱۴	$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
۱۵	$\sinh\omega t$	$\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$
۱۶	$\cos h\omega t$	$\frac{s}{s^2-\omega^2}$
۱۷	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
۱۸	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$
۱۹	$\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_n t}\sin\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t$	$\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$
۲۰	$-\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_n t}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t-\phi\right)$ $\phi=\tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$	$\frac{s}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$
۲۱	$1-\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_n t}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t+\phi\right)$ $\phi=\tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$	$\frac{\omega_n^2}{s(s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2)}$

۳- ویژگی ها وقضایای تبدیل لاپلاس

$$L\left[Af(t)\right]=AF(s)$$

$$L\left[f_1(t)\pm f_2(t)\right]=F_1(s)\pm F_2(s)$$

$$L\left[e^{-at}f(t)\right]=F(s+a)$$

$$L\left[f(t-a)u(t-a)\right]=e^{-as}F(s) \quad , a\geq 0$$

$$L\left[f(\frac{t}{a})\right]=aF(as)$$

$$L\left[tf(t)\right]=-\frac{dF(s)}{ds}$$

$$L\left[t^n f(t)\right]=(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}F(s) \quad , n=1,2,3,...$$

$$L\left[\frac{1}{t}f(t)\right]=\int_s^{\infty}F(s)ds$$

$$L\left[\int_0^t f(t)dt\right]=\frac{F(s)}{s}$$

$$L\left[\frac{d}{dt}f(t)\right]=sF(s)-f(0)$$

$$L\left[\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right]=s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}\dot{f}(0)-...-sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)$$

که در آن:

$$f^{(k)}(t)=\frac{d^k}{dt^k}f(t)$$

۴- عکس تبدیل لاپلاس

روش مناسب یافتن عکس تبدیل لاپلاس ، استفاده از جدول زوجهای تبدیل لاپلاس است . اغلب ، تابع مورد نظر به شکلی نیست که بتوان به طور مستقیم از جدول مذکور استفاده نمود. در این شرایط ، باید تابع مورد نظر را به صورت کسرهای جزئی بسط دهیم و $F(s)$ را بر حسب توابع ساده‌ای که در جدول موجودند بنویسیم.

الف- تجزیه $F(s)$ به کسرهای جزئی در حالتی که همه قطبهای آن مجزا از هم باشند.

مثال ۱

عکس تبدیل لاپلاس تابع زیر را بیابید؟

$$F(s)=\frac{s+5}{(s+2)(s+3)}$$

حل:

$$F(s)=\frac{s+5}{(s+2)(s+3)}=\frac{A}{s+2}+\frac{B}{s+3}$$

$$A=\left[(s+۲).\frac{s+۵}{(s+۲)(s+۳)}\right]_{s=-۲}=۳$$

$$B=\left[(s+۳).\frac{s+۵}{(s+۲)(s+۳)}\right]_{s=-۳}=-۲$$

$$F(s)=\frac{s+۵}{(s+۲)(s+۳)}=\frac{۳}{s+۲}-\frac{۲}{s+۳}$$

در نتیجه:

$$f(t)=۳e^{-۲t}-۲e^{-۳t}$$

ب- تجزیه $F(s)$ به کسرهای جزئی در حالتی که $F(s)$ دارای قطبهای مزدوج مختلط می باشد.

مثال ۲

معکوس لاپلاس تابع مقابل را محاسبه نمایید؟

$$F(s)=\frac{۲s+۵}{s\left(s^{۲}+۲s+۵\right)}$$

حل:

$$F(s)=\frac{۲s+۵}{s\left(s^{۲}t۲s+۵\right)}=\frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^{۲}t۲s+۵}\qquad(۱)\qquad A=\left[s.\frac{۲s+۵}{s\left(s^{۲}t۲s+۵\right)}\right]_{s=.}=۱$$

با قرار دادن $A=۱$ در رابطه (۱) و مخرج مشترک گرفتن از آن و با برابر قرار دادن ضرایب متناظر s در دو طرف رابطه خواهیم داشت :

$$B=-۱\quad,\quad C=۰$$

$$F(s)=\frac{۱}{s}-\frac{s}{s^{۲}+۲s+۵}=\frac{۱}{s}-\frac{s}{(s+۱)^{۲}+۲^{۲}}=\frac{۱}{s}-\frac{(s+۱)-۱}{(s+۱)^{۲}+۲^{۲}}$$

$$\Rightarrow F(s)=\frac{۱}{s}-\frac{s+۱}{(s+۱)^{۲}+۲^{۲}}+\frac{۱}{۲}.\frac{۲}{(s+۱)^{۲}+۲^{۲}}\Rightarrow f(t)=۱-e^{-t}\cos ۲t+\frac{۱}{۲}e^{-t}\sin ۲t$$

ج-تجزیه $F(s)$ به کسرهای جزئی در حالتی که $F(s)$ قطب مکرّر دارد.

مثال ۳

معکوس لاپلاس تابع مقابل کدام است ؟

$$F(s)=\frac{s^{۲}+۲s+۳}{(s+۱)^{۳}}$$

۱) $e^{-t}\left(t^{۲}+۱\right)$ ۲) $e^{t}\left(t^{۲}+۱\right)$ ۳) $e^{-t}\left(t^{۲}-۱\right)$ ۴) $e^{t}\left(t^{۲}-۱\right)$

حل: گزینه «۱»

$$F(s)=\frac{s^{۲}+۲s+۳}{(s+۱)^{۳}}=\frac{A}{(s+۱)}+\frac{B}{(s+۱)^{۲}}+\frac{C}{(s+۱)^{۳}}$$

$$C=\left[(s+۱)^{۳}.F(s)\right]_{s=-۱}=۲$$

$$B=\frac{d}{ds}\Big[(s+1)^3.F(s)\Big]_{s=-1}=0$$

$$A=\frac{1}{2!}\frac{d^2}{ds^2}\Big[(s+1)^3.F(s)\Big]_{s=-1}=1$$

$$F(s)=\frac{1}{s+1}+\frac{2}{(s+1)^3}\Rightarrow f(t)=e^{-t}+t^2e^{-t}=e^{-t}\left(t^2+1\right)$$

۵- دو قضیه بسیار کاربردی

- **قضیه مقدار نهایی** : این قضیه رفتار حالت ماندگار $f(t)$ را به رفتار $sF(s)$در همسایگی $s=0$ نسبت می دهد.

قضیه مقدار نهایی به این صورت بیان می شود : اگر $f(t)$ و $\frac{df(t)}{dt}$دارای تبدیل لاپلاس بوده و $f(t)$ در $t\to\infty$ حد داشته باشد ، آنگاه :

$$\lim_{t\to\infty} f(t)=\lim_{s\to 0} sF(s)$$

مثال ٤

اگر قضیه مقدار نهایی را در مورد سوال ۳ بکار ببریم خواهیم داشت:

$$\left.\begin{aligned} f(t)=e^{-t}\left(t^2+1\right)&\Rightarrow \lim_{t\to\infty} f(t)=0\\ F(s)=\frac{s^2+2s+3}{(s+1)^3}&\Rightarrow \lim_{s\to 0} sF(s)=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow \lim_{t\to\infty} f(t)=\lim_{s\to 0} sF(s)$$

- **قضیه مقدار اوّلیه** : با استفاده از این قضیه می توان مقدار تابع $f(t)$ را در زمانی کمی پس از لحظه صفر ، با استفاده از تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ محاسبه نمود.

قضیه مقدار اوّلیه به این صورت قابل بیان است : اگر $f(t)$ و $\frac{df(t)}{dt}$دارای تبدیل لاپلاس بوده و حد $sF(s)$ در $s\to\infty$ موجود باشد، آنگاه :

$$f\left(0^+\right)=\lim_{s\to\infty} sF(s)$$

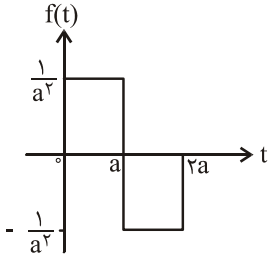
مثال ۵

قضیه مقدار اولیه را در مورد سوال ۳ بکار می‌بریم:

$$\left.\begin{aligned} f(t)=e^{-t}\left(t^2+1\right)&\Rightarrow f\left(0^+\right)=1\\ F(s)=\frac{s^2+2s+3}{(s+1)^3}&\Rightarrow \lim_{s\to\infty} sF(s)=1\end{aligned}\right\}\Rightarrow f\left(0^+\right)=\lim_{s\to\infty} sF(s)$$

سؤالات آخر فصل

۱- تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ داده شده در شکل زیر را بیابید.



۲- عکس تبدیل لاپلاس تابع $F(s)$ را بیابید؟

$$F(s)=\frac{5(s+2)}{s^2(s+1)(s+3)}$$

۳- تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ در رابطه زیر داده شده است. مقدار اولیه $\frac{df(t)}{dt}$ چند است ؟

$$F(s)=L[f(t)]=\frac{2s+1}{s^2+s+1}$$

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) -۲

۴- عکس تبدیل لاپلاس تابع زیر را محاسبه کنید.

$$F(s)=\frac{s^4+2s^3+3s^2+4s+5}{s(s+1)}$$

۵- به کمک تبدیل لاپلاس ، معادله دیفرانسیل مقابل را حل کنید؟

$$\ddot{x}+3\dot{x}+6x=0\ ,\ x(0)=0\ ,\ \dot{x}(0)=3$$

پاسخ سؤالات آخر فصل

۱- گزینه «۱»

تابع $f(t)$ را می توان به این صورت نوشت :

$$f(t)=\frac{۱}{a^۲}u(t)-\frac{۲}{a^۲}u(t-a)+\frac{۱}{a^۲}u(t-۲a)$$

در نتیجه :

$$F(s)=L\left[f(t)\right]=\frac{۱}{a^۲}.\frac{۱}{s}-\frac{۲}{a^۲}\frac{e^{-as}}{s}+\frac{۱}{a^۲}.\frac{e^{-۲as}}{s}=\frac{۱}{a^۲s}\left(۱-۲e^{-as}+e^{-۲as}\right)$$

۲- گزینه «۱»

$$F(s)=\frac{۵(s+۲)}{s^۲(s+۱)(s+۳)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s^۲}+\frac{C}{s+۱}+\frac{D}{s+۳}$$

$$A=\frac{d}{ds}\left[s^۲.F(s)\right]_{s=۰}=\frac{-۲۵}{۹}$$

$$B=\left[(s^۲).F(s)\right]_{s=۰}=\frac{۱۰}{۳}$$

$$C=\left[(s+۱).F(s)\right]_{s=-۱}=\frac{۵}{۲}$$

$$D=\left[(s+۳)F(s)\right]_{s=-۳}=\frac{۵}{۱۸}$$

درنتیجه:

$$F(s)=-\frac{۲۵}{۹}.\frac{۱}{s}+\frac{۱۰}{۳}.\frac{۱}{s^۲}+\frac{۵}{۲}.\frac{۱}{s+۱}+\frac{۵}{۱۸}.\frac{۱}{s+۳}$$

بنابراین :

$$f(t)=\left(-\frac{۲۵}{۹}+\frac{۱۰}{۳}t+\frac{۵}{۲}e^{-t}+\frac{۵}{۱۸}e^{-۳t}\right)u(t)$$

---

۳ - گزینه «۲»

همان طور که می دانیم:

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right]=sF(s)-f(۰)$$

بنابراین ابتدا مقدار $f(۰)$ را محاسبه می کنیم . با استفاده از قضیه مقدار اولیه داریم:

$$f(۰)=\lim_{s\to\infty}sF(s)=\lim_{s\to\infty}\frac{s(۲s+۱)}{s^۲+s+۱}=۲\ \Rightarrow L\left[\frac{df(t)}{dt}\right]=sF(s)-۲=\frac{-(s+۲)}{s^۲+s+۱}$$

مجدداً با استفاده از قضیه مقدار اولیه خواهیم داشت :

$$\frac{df}{dt}(۰)=\lim_{s\to\infty}sL\left[\frac{df(t)}{dt}\right]=\lim_{s\to\infty}\frac{-s(s+۲)}{s^۲+s+۱}=-۱$$

۴- گزینه «»

از آنجا که تابع $F(s)$ یک تابع ناسره است ، یعنی درجه صورت از درجه مخرج بزرگتر است، ابتدا بایستی صورت را بر مخرج تقسیم کنیم :

$$F(s)=s^{۲}+s+۲+\frac{۲s+۵}{s(s+۱)}=s^{۲}+s+۲+\frac{A}{s}+\frac{B}{s+۱}$$

$$A=\left[s.\frac{۲s+۵}{s(s+۱)}\right]_{s=۰}=۵\quad,\quad B=\left[(s+۱).\frac{۲s+۵}{s(s+۱)}\right]_{s=-۱}=-۳$$

$$F(s)=s^{۲}+s+۲+\frac{۵}{s}-\frac{۳}{s+۱}$$

در نتیجه :

$$f(t)=\frac{d^{۲}\delta(t)}{dt^{۲}}+\frac{d\delta(t)}{dt}+۲\delta(t)+۵u(t)-۳e^{-t}u(t)$$

۵- گزینه «»

از معادله دیفرانسیل فوق ، تبدیل لاپلاس می گیریم:

$$s^{۲}X(s)-s\,x(۰)-\dot{x}(۰)+۳sX(s)-۳x(۰)+۶X(s)=۰$$

$$\left(s^{۲}+۳s+۶\right)X(s)=۳$$

$$X(s)=\frac{۳}{s^{۲}+۳s+۶}=(۱/۵۵)\frac{۱/۹۴}{(s+۱/۵)^{۲}+۱/۹۴^{۲}}\Rightarrow x(t)=۱/۵۵e^{-۱/۵t}\sin(۱/۹۴t)$$

فصل دوم

سیستمهای کنترل

عناوین اصلی

- سیستم کنترل حلقه باز
- سیستم کنترل حلقه بسته
- دیاگرام بلوکی
- ساده کردن دیاگرام بلوکی