

دانش اگر در ثریا هم باشد مردمانی از سرزمین پارس بر آن دست خواهند یافت.

پیامبر اعظم (ص)

شرح جامع

الکترومغناطیس

«مهندسی برق»

مولف: احسان میرزایی

انتشارات ارشد

پیشگفتار ناشر

خداوند بزرگ را شاکریم که فرصتی عنایت فرمود تا بتوانیم قدمی در جهت گسترش علم و فرهنگ کشور عزیزمان برداریم و مسیری هموار را در اختیار مخاطبان و داوطلبان علاقمند به ادامه تحصیل قرار دهیم. از آنجائی که درحوزه کتاب‌های درسی و کمک درسی کارشناسی ارشد کتاب‌های زیادی به رشته تحریر در آمده است با این حال وجود یک مجموعه جامع، دقیق، کامل و دارای رفرنس(منابع) مستند احساس می‌شود.

همیشه دغدغه داشتیم که ای کاش می‌شد تمامی منابع پراکنده و گاهاً دست نایافتنی کنکور در یک مجموعه به گونه‌ای جذاب و شیوا آماده می‌شد و همچنین سوالات دوره‌های قبل کنکور نیز به گونه‌ای تشریحی پاسخ داده می شدند، که خدشه‌ای بر آنها وارد نشود و خیال داوطلبان عزیز آنقدر آسوده باشد که اطلاعات مندرج در پاسخنامه‌ها را برای بهره‌گیری در آزمون خود بکار گیرند. این کار با یاری خداوند بزرگ و همکاری نخبه‌ترین دانشجویان و اساتید کشور در انتشارات ارشد هماهنگ گردید و در تمامی مقاطع تحصیلی از کاردانی به کارشناسی، کارشناسی ارشد و دکتری در حوزهٔ آزمون‌های سراسری – آزاد و پیام نور بسته‌های آموزشی شامل کتاب‌های بانک سوالات و کتاب‌های شرح جامع درس آماده گردید. در تهیه مجموعه‌های فوق‌الذکر از فارغ‌التحصیلان کارشناسی ارشد و دکتری که حائز رتبه‌های تک رقمی کنکور می‌باشند، استفاده کرده‌ایم، تا شما عزیزان بتوانید در راستای افزایش توان علمی خود در جهت نیل به مقصود خویش نایل آیید. بدون تردید می‌توان گفت که برای اولین بار در نظام آموزشی کشور مجموعه‌ای به این سبک عرضه می‌شود که در کیفیت و کمیت بی‌نظیر بوده و تمامی نیازهای دانشجویان و داوطلبان عزیز را پوشش می‌دهد. امید است که استفاده از این مجموعه عزیزان را در جهت موفقیت در آزمون یاری رسانده باشد. در پایان لازم به ذکر است که بی نقصی محض از آن خداوند متعال می‌باشد، بنا براین از تمامی خوانندگان و داوطلبان عزیز خواهشمندیم نظرات سازنده خود را در مورد این کتاب به سایت انتشارات ارشد اعلام نمایند تا ما را در جهت هر چه بهتر آماده کردن این محصولات یاری رسانند.

با تشکر

ناشـــــر

www.arshadbook. ir

بسم الله الرحمن‌الرحیم

پیشگفتار مولف

اللهم عجل لولیک الفرج و العافیه و النصر و إجعلنا من خیر انصاره و اعوانه و المستشهدین بین یدیه. کتابی که در پیش رو دارید شامل خلاصه مباحث درس الکترومغناطیس می‌باشد به طوری که روابط اصلی این درس و کاربرد آن‌ها در حل مسائل الکترومغناطیس آورده شده ولی از اثبات این روابط صرف نظر شده است. نکته‌ای که عزیزان دانشجو در فراگیری این درس باید مدنظر داشته باشند، تمرین و ممارست در حل مسائل الکترومغناطیس می‌باشد. بر همین اساس در این کتاب نیز سعی بر آن بوده است که پس از یک توضیح مختصر در مورد روابط هر بخش، مثل‌های متعددی که بیانگر کاربرد آن روابط می‌باشد استفاده شود و در انتهای بخش نیز برای تمرین بیشتر سؤالات انتهای فصل مربوط به آن بخش مشخص شده‌اند. با این روش در کمترین زمان می‌توانید به نتیجه‌ی حداکثری در زمینه حل مسئله برسید، البته برای فهم عمیق‌تر مطالب مطالعه یک کتاب مرجع خوب نیز توصیه می‌شود. با دقت در تعداد مثال‌های مطرح شده برای هر بخش نیز می‌توان اهمیت روابط آن بخش را در طرح سؤالات نیز حدس زد به عنوان مثال به طور کلی تقریباً ۷۰ درصد سؤالات ارشد از دو فصل دو و پنج مطرح می‌شود. نکته دیگری که باید در نظر داشت روش مطالعه برای آزمون کارشناسی ارشد است. روشی که توصیه می‌شود این است که علاوه بر روابط اصلی هر فصل، روابط کمکی دیگری که در حل سؤالات کنکور و صرفه‌جویی در وقت تأثیر دارند در برگه‌ای جمع‌آوری کرده و قبل از شروع به حل سؤالات، آن‌ها را مرور نماییم. در این کتاب نیز این روابط مشخص شده و در انتهای هر فصل آورده شده‌اند. توصیه دیگر برای بر طرف کردن مشکل سرعت در حل سؤالات، حل سؤالات ارشد به دفعات مکرر است یعنی اگر می‌خواهید در یک درس از دورس آزمون نتیجه خوبی عایدتان شود باید حداقل سه یا چهار بار اقدام به حل سؤالات آزمون‌های سال‌های قبل آن درس در فواصل زمانی معین نماید. هدف از تألیف این کتاب کمک به مطالعه صحیح این درس می‌باشد که امیدوارم با یاری خدا و سعی و تلاش خوانندگان کتاب تا اندازه‌ای در نیل به این هدف موفق شده باشم. در صورت مشاهده هر گونه اشتباه علمی و تایپی می‌توانید آن را در سایت انتشارات ارشد منعکس نماید.

در پایان بر خود فرض می‌دارم از تمامی کسانی که در تهیه و انتشار این کتاب کمک کرده‌اند، مخصوصاً از ناشر محترم که این اعتماد را به این بنده کرده‌اند، تشکر نمایم و این اثر ناچیز را به مقام معظم رهبری تقدیم می‌نمایم.

موفق و مؤید باشید.

احسان میرزایی

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

پیشگفتار ناشر ۳
پیشگفتار مولف ۴

فصل اول: آنالیز برداری

مقدمه ۹
(۱ـ۱) قضایا و روابط برداری ۹
(۱ـ۲) بیان قضایا در مختصات سه‌گانه ۱۰
(۱ـ۳) دو اتحاد برداری مهم در الکترومغناطیس ۱۲

فصل دوم: میدان‌های الکتریکی ساکن

مقدمه ۱۹
(۲ـ۱) فرضیات اصلی الکتریسیته ساکن ۱۹
(۲ـ۲) قانون گاوس ۲۴
(۲ـ۳) پتانسیل الکتریکی ۲۶
(۲ـ۴) پتانسیل و میدان الکتریکی دو قطبی الکتریکی ۳۱
(۲ـ۵) دی‌الکتریک‌ها در میدان‌های الکتریکی ۳۲
(۲ـ۶) شرایط مرزی میدان‌های الکتریکی ساکن ۳۴
(۲ـ۷) ظرفیت و خازن‌ها ۳۶
(۲ـ۸) انرژی الکتریکی ساکن ۴۱
خلاصه فصل: ۴۷

فصل سوم: حل مسائل الکتریسیته ساکن

مقدمه ۷۱
(۳ـ۱) روش تصاویر ۷۱
(۳ـ۲) بار خطی و استوانه هادی موازی ۷۴
(۳ـ۳) بار نقطه‌ای و کره هادی ۷۵
(۳-۴) مسائل مقدار مرزی در مختصات کارتزین ۷۸
(۳ـ۵) حل معادله لاپلاس در مختصات استوانه‌ای ۸۱

عنوان **صفحه**

(۳ـ۶) حل معادله لاپلاس در مختصات کروی ۸۴
حل معادله لاپلاس دوبعدی در مختصات کروی ۸۵
خلاصه فصل: ۸۶

فصل چهارم: جریان‌های الکتریکی دائم

مقدمه ۹۵
(۴ـ۱) چگالی جریان و قانون اهم ۹۵
(۴ـ۲) معادله پیوستگی ۹۷
(۴ـ۳) اتلاف توان ۹۸
(۴ـ۴) شرایط مرزی چگالی جریان ۹۹
خلاصه فصل: ۱۰۴

فصل پنجم: میدان‌های مغناطیسی ساکن

مقدمه ۱۱۳
(۵-۱) روابط اساسی در مغناطیس ساکن ۱۱۳
(۵ـ۲) پتانسیل مغناطیسی برداری ۱۱۷
(۵ـ۳) قانون بیوساوار ۱۱۸
(۵ـ۴) دوقطبی مغناطیسی ۱۲۰
(۵ـ۵) پتانسیل مغناطیسی عددی ۱۲۲
(۵ـ۶) مغناطیس شدگی و چگالی جریان‌های معادل ۱۲۳
(۵ـ۷) مدارهای مغناطیسی ۱۲۹
(۵ـ۸) شرایط مرزی میدان‌های مغناطیسی ساکن ۱۳۰
(۵ـ۹) اندوکتانس‌ها و سلف‌ها ۱۳۳
(۵ـ۱۰) انرژی مغناطیسی ۱۳۶
(۵ـ۱۱) نیروها و گشتاورهای مغناطیسی ۱۴۰
خلاصه فصل: ۱۴۵
منابع و مآخذ ۱۶۸

فصل اول

آنالیز برداری

عناوین اصلی

- قضایا و روابطبرداری
- بیان قضایا در مختصات سه‌گانه
- دو اتحادبرداری مهم در الکترومغناطیس

فصل اول

آنالیز برداری

مقدمه

همانطور که می‌دانیم کمیات به دو دسته عددی و برداری تقسیم می‌شوند. در این فصل ابتدا برخی عملگرهای برداری مفید در الکترومغناطیس و قضایای مربوطه را در دستگاه مختصات کلی (w و v و u) مرور می‌کنیم و در بخشهای بعد این روابط کلی را در سه دستگاه مختصات پر کاربرد بدست می‌آوریم. در انتها هم چند اتحادبرداری که در بقیه فصول از آنها استفاده خواهیم کرد را بیان می‌کنیم.

(۱ـ۱) قضایا و روابط برداری

در آنالیز برداری لازم است که انتگرال‌های خطی، سطحی و حجمی را محاسبه نماییم و در هر مورد بایستی تغییر دیفرانسیلی طولی متناظر با متغیر دیفرانسیلی یکی از مختصات‌ها را بیان نماییم. رابطه طولی در حالت کلی عبارتست از:

$$\vec{dl} = \hat{u}_1 h_1 du_1 + \hat{u}_2 h_2 du_2 + \hat{u}_3 h_3 du_3 \qquad (۱-۱)$$

که در اینجا h_i ها، ضرایب متری نامیده می‌شوند و با توجه به دستگاه مختصات تعیین می‌گردد.

دیفرانسیل سطحی: برابر حاصل‌ضرب دو بعد از دیفرانسیل‌های طولی می‌باشد.

$$ds_1 = h_2 h_3 du_2 du_3 \qquad (۱-۲)$$

$$ds_2 = h_1 h_3 du_1 du_3 \qquad (۱-۳)$$

$$ds_3 = h_1 h_2 du_1 du_2 \qquad (۱-۴)$$

دیفرانسیل حجمی برابر حاصل ضرب هر سه دیفرانسیل طولی می‌باشد.

$$du = h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3 \qquad (۱-۵)$$

۱ـ۱ـ۱ گرادیان: اگر نرخ تغییرات یک کمیت اسکالر در جهت‌های مختلف متفاوت باشد به معنای این است که نرخ تغییرات آن برداری است. برای این نرخ تغییرات یک عملگر برداری تعریف می‌شود که در حالت کلی دارای تعریف زیر است:

$$\nabla = \frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial u_1}\hat{u}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial u_2}\hat{u} + \frac{1}{h_3}\frac{\partial}{\partial u_3}\hat{u}_3$$

گرادیان یک تابع در یک نقطه، اندازه و جهت حداکثر تغییرات تابع را در نقطه مورد نظر بیان می‌کند.

قضیه گرادیان: انتگرال خطی گرادیان یک تابع عددی در طول یک مسیر برابر تفاضل مقدار آن تابع در نقاط ابتدا و انتهای آن مسیر خواهد بود:

$$\int_a^b (\nabla V).\vec{dl} = V(b) - V(a) \qquad (۱-۶)$$

۱ـ۱ـ۲ دیورژانس: دیورژانس یک میدان برداری در یک نقطه، به صورت شار خالص خروجی بردار در واحد حجم، وقتی که این حجم حول نقطه مورد نظر به صفر میل کند بیان می‌شود:

$$\nabla.\vec{A} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oint_s \vec{A}\cdot\vec{ds}}{\Delta v} \qquad (۱-۷)$$

در صورتی که رابطهٔ اخیر را ساده کنیم داریم:

$$\nabla\cdot\vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2 h_3 A_{u_1}) + \frac{\partial}{\partial u_2}(h_1 h_3 A_{u_2}) + \frac{\partial}{\partial u_3}(h_1 h_2 A_{u_3})\right] \qquad (۱-۸)$$

قضیه دیورژانس: انتگرال حجمی دیورژانس یک میدان برداری با شار کل خروجی بردار از سطح در برگیرنده حجم مورد نظر برابر است، که با توجه به تعریف دیورژانس منطقی هم به نظر می‌رسد:

$$\int_v \nabla\cdot\vec{A}dv = \oint_s \vec{A}\cdot\vec{ds} \qquad (۱-۹)$$

۱ـ۱ـ۳ کرل یک میدان برداری: برداری است که اندازه آن حداکثر گردش خالص بردار $\vec{A}$ در واحد سطح، وقتی که سطح به سمت صفر میل می‌کند، را نمایش می‌دهد و تعریف ریاضی آن به صورت زیر است:

$$\nabla\times\vec{A} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\hat{n}\oint_C \vec{A}\cdot\vec{dl}}{\Delta s} \qquad (۱-۱۰)$$

که $\hat{n}$ بردار یکّه عمود بر سطح است. معمولاً در محاسبات از رابطه‌ی ساده شده زیر استفاده می‌شود:

$$\nabla\times\vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\begin{vmatrix} h_1\hat{u}_1 & h_2\hat{u}_2 & h_3\hat{u}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 A_{u_1} & h_2 A_{u_2} & h_3 A_{u_3} \end{vmatrix} \qquad (۱-۱۱)$$

قضیه استوکس: انتگرال سطحی کرل یک بردار روی یک سطح باز، برابر انتگرال خطی بردار روی مسیر بسته‌ای است که سطح مورد نظر را در بر می‌گیرد:

$$\int_s (\nabla\times\vec{A})\cdot\vec{ds} = \oint_C \vec{A}\cdot\vec{dl} \qquad (۱-۱۲)$$

۱ـ۱ـ۴ لاپلاسین: این عملگر در مورد توابع عددی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\nabla^2 V = \nabla.(\nabla V) \qquad (۱-۱۳)$$

در صورت ساده کردن این رابطه خواهیم داشت:

$$\nabla^2 V = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial V}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{h_1 h_3}{h_2}\frac{\partial V}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial V}{\partial w}\right)\right] \qquad (۱-۱۴)$$

(۱ـ۲) بیان قضایا در مختصات سه‌گانه

حال هر کدام از مباحث بالا را برای دستگاه‌های مختصات سه‌گانه بیان می‌کنیم:

۱ـ۲ـ۱ مختصات کارتزین:

$$h_۱ = h_۲ = h_۳ = ۱ \Rightarrow \vec{dl} = \hat{x}dx + \hat{y}dy + \hat{z}dz$$

$$ds_x = dydz,\ ds_y = dxdz,\ ds_z = dxdy \qquad dv = dx\,dy\,dz$$

گرادیان تابع اسکالر V:

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{z}$$

دیورژانس میدان برداری $\vec{A}$:

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

کرل میدان برداری $\vec{A}$:

$$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

لاپلاسین تابع اسکالر V:

$$\nabla^۲ V = \frac{\partial^۲ V}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲ V}{\partial y^۲} + \frac{\partial^۲ V}{\partial z^۲}$$

۱ـ۲ـ۲ روابط مختصات استوانه‌ای

$$h_۱ = h_۳ = ۱\ ,\ h_۲ = r \Rightarrow \vec{dl} = \hat{r}dr + \hat{\varphi}rd\varphi + \hat{z}dz$$

$$ds_r = rd\varphi dz\ ,\ ds_\varphi = drdz\ ,\ ds_z = rdrd_\varphi \qquad dv = rdrd\varphi dz$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\hat{r} + \frac{۱}{r}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\hat{\varphi} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{z}$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{۱}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{\partial}{\partial \varphi}(A_\varphi) + \frac{\partial}{\partial z}(rA_z)\right]$$

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{۱}{r}\begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\varphi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_r & rA_\varphi & A_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla^۲ V = \frac{۱}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{۱}{r}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(r\frac{\partial V}{\partial z}\right)\right]$$

$$\nabla^۲ V = \frac{۱}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{۱}{r}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(r\frac{\partial V}{\partial z}\right)\right]$$

روابط بین z، y، x و z ، φ، r:

$$x = r\cos\varphi\ ,\ y = r\sin\varphi\ ,\ z = z$$

$$r = \sqrt{x^۲ + y^۲}\ ,\ \varphi = \tan^{-۱}(\frac{y}{x})$$

۱ـ۲ـ۳ مختصات کروی:

$$h_1 = 1 \;,\; h_2 = r \;,\; h_3 = r\sin\theta \Rightarrow \vec{dl} = \hat{r}dr + \hat{\theta}rd\theta + \hat{\varphi}r\sin\theta d\varphi$$

$$ds_r = r^2\sin\theta\, d\theta\, d\varphi \;,\; ds_\theta = r\sin\theta\, dr\, d\varphi \;,\; ds_\varphi = rdr\, d\theta \qquad dv = r^2\sin\theta dr\, d\theta\, d\varphi$$

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\hat{\varphi}$$

$$\nabla\cdot\vec{A} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r^2\sin\theta A_r) + \frac{\partial}{\partial\theta}(r\sin\theta A_\theta) + \frac{\partial}{\partial\varphi}(rA_\varphi)\right]$$

$$\nabla\times\vec{A} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & r\sin\theta\hat{\varphi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\varphi} \\ A_r & rA_\theta & r\sin\theta A_\varphi \end{vmatrix}$$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\varphi}\right)\right]$$

روابط بین x,y,z و r,θ,φ:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi \quad و \quad y = r\sin\theta\sin\varphi \quad و \quad z = r\cos\theta$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \quad , \quad \theta = tg^{-1}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \quad , \quad \varphi = tg^{-1}\frac{y}{x}$$

(۱ـ۳) دو اتحاد برداری مهم در الکترومغناطیس

اتحاد اول: کرل گرادیان هر تابع اسکالر، متحد با صفر است.

$$\nabla\times(\nabla V) = 0 \qquad (۱۳-۱)$$

بنابراین اگر یک میدان بدون کرل باشد می‌توان آن را به صورت گرادیان یک تابع اسکالر بیان کرد.

اتحاد دوم: دیورژانس کرل هر میدان برداری خوش رفتار متحد با صفر است.

$$\nabla\cdot(\nabla\times\vec{A}) = 0$$

بنابراین اگر دیورژانس یک بردار صفر باشد، آن بردار را می‌توان به صورت کرل یک بردار دیگر نوشت.

قضیه هلم هولتز: هر بردار را می‌توان به صورت مجموع کرل یک بردار و گرادیان یک تابع اسکالر بیان کرد:

$$\vec{A} = -\nabla V + \nabla\times\vec{F}$$

تست‌های آخر فصل

۱- بردار $\frac{1}{r\sin\theta\cos\theta}\hat{\theta}$ در مختصات کروی داده شده است. تبدیل آن را در مختصات کارتیزین به دست آورید. (آزاد ۱۳۸۸)

$$A=\left[(x^2+y^2)(x^2+y^2+z^2)\right]^{\frac{1}{2}}$$

۱) $A(z\bar{a}_x-\frac{yz}{x}\bar{a}_y+\frac{x^2+y^2}{x}\bar{a}_z)$ ۲) $A(z\bar{a}_x-\frac{yz}{x}\bar{a}_y-\frac{x^2+y^2}{x}\bar{a}_z)$

۳) $A(z\bar{a}_x+\frac{yz}{x}\bar{a}_y+\frac{x^2+y^2}{x}\bar{a}_z)$ ۴) $A(z\bar{a}_x-\frac{yz}{x}\bar{a}_y-\frac{x^2+y^2}{x}\bar{a}_z)$

۲- دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات با شعاع دو واحد در صفحه $z=0$ قرار گرفته است. بردار واحدی را تعیین نمائید که در صفحه $z=0$ قرار گرفته و بر این دایره در نقطه $(\sqrt{3},1,0)$ مماس بوده و همچین در جهت افزایش y می‌باشد. (آزاد ۱۳۸۷)

۱) $0/5\overline{a_x}-0/866\overline{a_y}$ ۲) $-0/866\overline{a_x}-0/5\overline{a_y}$ ۳) $-0/5\overline{a_x}+0/866\overline{a_y}$ ۴) $-0/866\overline{a_x}-0/5\overline{a_y}$

۳- معادله خطی را بنویسید که در صفحه $z=0$ قرار گرفته و عمود بر بردار $\overline{A}=3\overline{a_x}-4\overline{a_y}$ بوده و از نقطه $(1,5,0)$ عبور نماید. (آزاد ۱۳۸۷)

۱) $y=0/5x+4/5$ ۲) $y=0/75x+4/25$ ۳) $y=-0/75x+5/75$ ۴) $y=-0/5x+5/5$

۴- ثابت‌های a,b و c را طوری تعیین نمائید که بردار زیر غیر گردشی باشد: (آزاد ۱۳۸۵)

$$\overline{A}=(x+2y+az)\overline{a_x}+(bx-3y-z)+(4x+cy-2z)\overline{a_z}$$

۱) $a=4\ b=-1\ c=2$ ۲) $a=4\ b=2\ c=-1$ ۳) $a=2\ b=4\ c=-1$ ۴) $a=2\ b=-1\ c=4$

۵- به دست آورید نسبت مولفه شعاعی بردار نیروی $\overline{F}=3x^2\overline{a_x}-2yz\overline{a_y}+z^2\overline{a_z}$ را در $(2,1,0)$ به موقعیت $(0,1,2)$. (آزاد ۱۳۸۳)

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۶- بردار $\overline{E}=\frac{1}{r}(\overline{a_r}-\overline{a_\varphi})$ در مختصات استوانه‌ای داده شده است. مطلوبست محاسبه بردار واحدی را در مختصات کاتیزین که در جهت $\overline{E}$ بوده و از نقطه $\varphi=90^\circ, r=1$ و $z=0$ عبور می‌کند. (آزاد ۱۳۸۳)

۱) $-0/707\overline{a_x}+0/707\overline{a_y}$ ۲) $-0/707\overline{a_x}-0/707\overline{a_y}$ ۳) $0/707\overline{a_x}-0/707\overline{a_y}$ ۴) $0/707\overline{a_x}+0/707\overline{a_y}$

۷- مختصات استوانه‌ای نقطه‌ای با مختصات $z=3$ و $y=-2$ و $x=-1$ را به دست آورید. (آزاد ۱۳۸۱)

۱) $\rho=2/24,\phi=63/4^\circ,z=3$ ۲) $\rho=2/24,\phi=243/4^\circ,z=3$

۳) $\rho=2/24,\phi=296/6^\circ,z=3$ ۴) $\rho=2/24,\phi=126/8^\circ,z=3$

۸- مختصات کروی نقطه‌ای با مختصات مقابل را بیابید: $x=-1,y=-2,z=-3$ (آزاد ۱۳۸۱)

۱) $r=3/74,\phi=36/7^\circ,\theta=296/6^\circ$ ۲) $r=3/74,\phi=143/3^\circ,\theta=243/4^\circ$

۳) $r=3/74,\phi=143/3^\circ,\theta=296/6^\circ$ ۴) $r=3/74,\phi=36/7^\circ,\theta=243/4^\circ$

۹- به دست آورید کل بار را در حجم زیرین: (آزاد ۱۳۸۱)

مکعبی به ضلع $۲m$ موازی با محور ها در ناحیه $x,y,z \geq ۰$ یک گوشه در مبدأ مختصات و چگالی بار حجمی $\rho = ۲xy(z+۱)$

۱) $۸/۸C$ ۲) $۱۳/۵C$ ۳) $۶۴C$ ۴) $۸۹C$

۱۰- چگالی فلوی الکتریکی یکنواخت $۲\frac{C}{m^۲}$ در جهت بردار $۳\bar{a}_x - ۴\bar{a}_y$ وجود دارد. مطلوبست محاسبه دامنه فلوی الکتریکی که از صفحه xoz در محدوده $x=۱$ و $x=۰$ و $z=۱$ و $z=۰$ عبور می‌کند. (آزاد ۱۳۸۱)

۱) $۱/۰C$ ۲) $۱/۲C$ ۳) $۱/۴C$ ۴) $۱/۶C$

۱۱- اگر $\bar{A} = \bar{a}_x + \bar{a}_y - \bar{a}_z, \bar{B} = -۲\bar{a}_x + \bar{a}_y + \bar{a}_z, \bar{C}, \bar{B}, \bar{A}$ بوده و رابطه بین به صورت زیر باشد: (آزاد ۱۳۸۱)

$$\bar{A}\times(\bar{B}\times\bar{C})+(\bar{A}\times\bar{B})\times\bar{C} = -\bar{a}_X - ۹\bar{a}_y - ۵\bar{a}_z$$

به‌دست آورید $\bar{C}$ را.

۱) $۳\bar{a}_x + \bar{a}_y + ۲\bar{a}_z$ ۲) $-۳\bar{a}_x - \bar{a}_y - ۲\bar{a}_z$ ۳) $-۳\bar{a}_x + \bar{a}_y - ۲\bar{a}_z$ ۴) $۳\bar{a}_x - \bar{a}_y + ۲\bar{a}_z$

۱۲- کره‌ای به شعاع $a = ۵m$ به مرکز (۰،۰،۳) در دست است. فرض کنید $s_۱$ قطعه‌ای از سطح کره باشد که در $z>۰$ قرار گرفته باشد. مطلوبست محاسبه $\int_{s_۱}(\nabla\times\bar{H}).\overline{ds}$ ، اگر در مختصات کروی $\bar{H} = ۲r\hat{a}_\varphi \frac{A}{m}$ باشد. (سراسری ۱۳۷۷)

۱) ۱۶π ۲) ۳۲π ۳) ۴۸π ۴) ۶۴π

پاسخ تست‌های آخر فصل

۱-گزینه «؟»
۲-گزینه «۳»
۳-گزینه «۲»
۴-گزینه «۲»
۵-گزینه «۱»
۶-گزینه «۱»
۷-گزینه «۲»
۸-گزینه «۲»
۹-گزینه «۱»
۱۰-گزینه «۴»
۱۱-گزینه «۲»
۱۲-گزینه «۴»

فصل دوم

میدان‌های الکتریکی ساکن

عناوین اصلی

- فرضیات اصلی الکتریسیته ساکن
- قانون گاوس
- پتانسیل الکتریکی
- دوقطبی الکتریکی
- دی الکتریکها در میدانهای الکتریکی
- شرایط مرزی میدانهای الکتریکی ساکن
- ظرفیت و خازنها
- انرژی الکتریکی ساکن

فصل دوم

میدان‌های الکتریکی ساکن

مقدمه

در این فصل به بررسی میدانهای الکتریکی ساکن خواهیم پرداخت. در الکتریسیته ساکن، بارهای الکتریکی در حال سکون هستند و میدانهای الکتریکی نیز با زمان تغییر نمی‌کنند و میدانهای مغناطیسی نیز وجود ندارند. در این فصل ابتدا فرضیات اصلی الکتریسیته ساکن را بیان کرده و در ادامه قوانین کولمب و گاوس و کاربردهای آنها مورد بررسی قرار می‌گیرند. سپس به بررسی پتانسیل الکتریکی، هادی‌ها و دی‌الکتریکها در میدان الکتریکی ساکن و شرایط مرزی میدانهای الکتریکی ساکن می‌پردازیم. در انتها نیز نیروها و انرژی در الکتریسیته ساکن را بررسی می‌کنیم.

(۲ـ۱) فرضیات اصلی الکتریسیته ساکن

دو فرض اصلی الکتریسیته ساکن که بقیه روابط این فصل را می‌توان از آنها نتیجه گرفت عبارتند از:

$$\nabla.\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon} \qquad (۱-۲)$$

$$\nabla\times\vec{E}=۰ \qquad (۲-۲)$$

با استفاده از رابطه اول می‌توان قانون گاوس را بدست آورد و از قانون گاوس می‌توان قانون کولمب را نتیجه گرفت.

مثال ۱:

شدت میدان الکتریکی در فضا برابر $\frac{۲r}{\varepsilon_۰}\hat{r}$ می‌باشد، مقدار چگالی بار در این ناحیه چقدر است؟

۱) $۲\frac{C}{m^۳}$ ۲) $۶\frac{C}{m^۳}$ ۳) $۲\varepsilon_۰\frac{C}{m^۳}$ ۴) $۶\varepsilon_۰\frac{C}{m^۳}$

حل: با استفاده از رابطه اخیر داریم:

$$\nabla\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_۰}\ ,\ \nabla\cdot\vec{E}=\frac{۱}{r^۲}\frac{\partial}{\partial r}(r^۲E_r)=\frac{۱}{r^۲}\frac{\partial}{\partial r}(\frac{۲r^۳}{\varepsilon_۰})$$

$$=\frac{۶}{\varepsilon_۰}\Rightarrow\frac{۶}{\varepsilon_۰}=\frac{\rho}{\varepsilon_۰}\Rightarrow\rho=۶\frac{C}{m^۳}$$

بنابراین گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

مثال ۲:

در ناحیه‌ای از فضا میدان الکتریکی ساکن در همه جا موازی محور x هاست و بار الکتریکی وجود ندارد کدام یک از عبارت‌های زیر صحیح است؟ **(سراسری ۱۳۷۴)**

۱) میدان الکتریکی $\vec{E}$ فقط مستقل از x و y است.
۲) میدان الکتریکی $\vec{E}$ مستقل از x و z است.
۳) میدان الکتریکی $\vec{E}$ مستقل از x و y و z است.
۴) میدان الکتریکی $\vec{E}$ مستقل از y و z است.

حل: از آنجا که فضا بدون بار است داریم $\nabla\cdot\vec{E}=0$ و از آنجا که میدان متغیر با زمان نیست، داریم: $\nabla\times\vec{E}=0$، در ضمن طبق صورت مسئله میدان تنها در جهت x مؤلفه دارد.

$$\nabla\cdot\vec{E}=\frac{\partial E_x}{\partial x}=0$$

$$\nabla\times\vec{E}=\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ E_x & 0 & 0\end{vmatrix}=\frac{\partial E_x}{\partial z}\hat{y}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\hat{z}=0 \Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial y}=\frac{\partial E_x}{\partial z}=0$$

لذا گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

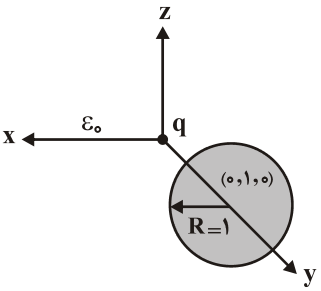
۲ـ۱ـ۱ قانون کولمب: نیروی بین دو جسم باردار q_1 و q_2 را گویند که از نظر ابعاد نسبت به فاصله بسیار کوچک هستند:

$$\overrightarrow{F_{12}}=\frac{q_1q_2(\vec{r_1}-\vec{r_2})}{4\pi\varepsilon_0\left|\vec{r_1}-\vec{r_2}\right|^3} \qquad (۳-۲)$$

$$\vec{E}=\frac{\vec{F}}{q}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^3} \qquad (۴-۲)$$

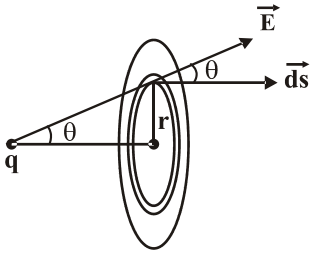
مثال ۳:

بار نقطه‌ای q واقع در مبدأ مختصات از سطح دایروی فرضی نشان داده شده در شکل یک کولن شار الکتریکی عبور می‌دهد. شدت میدان الکتریکی ناشی از این بار در نقطه $(0,1,0)$ چند ولت بر متر است؟ $\left(\varepsilon_0=\frac{1}{36}\times10^{-9}\ \frac{F}{m}\right)$ **(سراسری ۱۳۸۵)**



۱) $\frac{36}{\ln 2}\times10^9$
۲) $\frac{36}{2-\sqrt{2}}\times10^9$
۳) $\frac{18}{\ln 2}\times10^9$
۴) $\frac{18}{2-\sqrt{2}}\times10^9$

حل: با توجه به رابطهٔ $\varphi_e=\int_s\vec{D}\cdot\vec{ds}$ داریم:



$$\varphi_e = \int \varepsilon_\circ \vec{E}\cdot\vec{ds} \quad , \quad \vec{ds} = 2\pi r dr\,\hat{y} \quad , \quad \vec{E}\cdot\vec{ds} = |\vec{E}|\cdot|\vec{ds}|\cos\theta \quad , \quad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{r^2+1}}$$

$$\Rightarrow \vec{E}\cdot\vec{ds} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_\circ R^2}\times 2\pi r dr \times \frac{1}{\sqrt{r^2+1}} \quad , \quad R = \sqrt{r^2+1}$$

$$\Rightarrow \varphi_e = \int_\circ^1 \frac{qr}{2(r^2+1)^{\frac{3}{2}}}dr = \frac{q}{2}\left[\frac{-1}{\sqrt{r^2+1}}\right]_\circ^1 = \frac{q}{2}(1-\frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$\varphi_e = 1 \Rightarrow q = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} \Rightarrow E(\circ,1,\circ) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_\circ(1)^2} = 9\times10^9 q = \frac{18\sqrt{2}\times10^9}{2-\sqrt{2}} = \frac{36\times10^9}{2-\sqrt{2}}$$

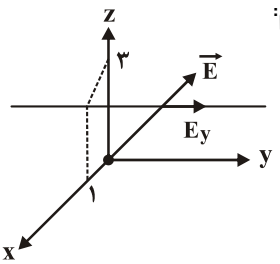
بنابراین گزینه ۲ صحیح می‌باشد. با استفاده از فرمول مساحت داده شده در مثال ۳، سریع‌تر می‌توان این مثال را حل کرد.

مثال ٤:

بار نقطه‌ی $Q(Q>\circ)$ در مبدأ مختصات قرار گرفته است، در چه نقطه‌ای از خط $x = 1m$ و $z = 3m$، میدان E_y حداکثر خواهد شد؟ **(آزاد ۱۳۸۲)**

۱) $y = 1/22m$ ۲) $y = 1/84m$ ۳) $y = 2/10m$ ۴) $y = 2/24m$

حل: با توجه به شکل زیر داریم:



$$E_y = \frac{y}{R}|\vec{E}| \quad , \quad R = \sqrt{(1)^2+(y)^2+(3)^2}$$

$$|\vec{E}| = \frac{q}{4\pi\varepsilon_\circ R^2} \Rightarrow E_y = \frac{yq}{4\pi\varepsilon_\circ R^3} = \frac{qy}{4\pi\varepsilon_\circ\sqrt{(y^2+10)^3}}$$

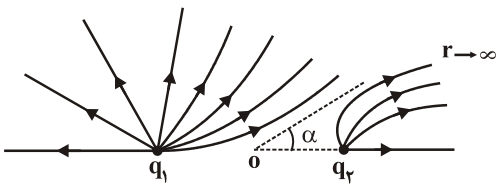
برای به دست آوردن حداکثر E_y از E_y نسبت به y مشتق گرفته و برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$\frac{dEy}{dy} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_\circ}\left(\frac{10-2y^2}{(y^2+10)^{\frac{5}{2}}}\right) = \circ \Rightarrow y = \sqrt{5} = 2/24$$

بنابراین گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

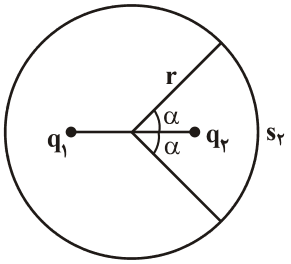
مثال ٥:

شکل زیر خطوط میدان الکتریکی دو بار نقطه‌ای را نشان می‌دهد، مقدار زاویه α مشخص شده در شکل چقدر است؟ $(q_2 < q_1)$



۱) $\cos^{-1}(\frac{q_2}{q_1})$ ۲) $\cos^{-1}(\frac{q_1}{q_2})$ ۳) $\sin^{-1}(\frac{q_1-q_2}{q_1+q_2})$ ۴) $\cos^{-1}(\frac{q_1-q_2}{q_1+q_2})$

حل: در حالتی که دو بار برابر باشند واضح است که این زاویه برابر $\frac{\pi}{۲}$ است. در واقع نکته‌ای که در این مسئله وجود دارد این است که فضایی که شار الکتریکی هر کدام از بارها به خود اختصاص می‌دهد متناسب با اندازه بار مورد نظر است.



$$\frac{q_۲}{q_۱+q_۲}=\frac{s_۲}{۴\pi r^۲}\ ,\ s_۲=۲(۱-\cos\alpha)\pi r^۲$$

$$\Rightarrow \frac{۱-\cos\alpha}{۲}=\frac{q_۲}{q_۱+q_۲}\Rightarrow \cos\alpha=\frac{q_۱-q_۲}{q_۱+q_۲}$$

بنابراین گزینه ۴ صحیح می‌باشد.

برای به دست آوردن سطح $s_۲$ می‌توانید از رابطه $s_۲=\int_۰^{۲\pi}\int_۰^{\alpha} r^۲\sin\theta d\theta d\varphi$ استفاده کنید البته بهتر است رابطهٔ داده شده را به خاطر بسپارید. از این رابطه می‌توان در حل مثال ۱ و بعضی سوالات کنکور ارشد کمک گرفت.

در حالتی که توزیع پیوسته بار داشته باشیم از روابط زیر برای تعیین میدان الکتریکی استفاده می‌کنیم.

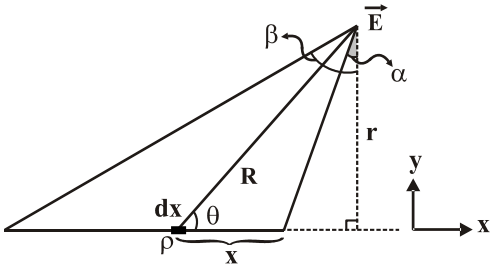
$$\vec{E}=\int_C \frac{\rho_l}{۴\pi\varepsilon_۰}\cdot\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^۳}dl \quad \text{توزیع خطی:} \qquad (۵-۲)$$

$$\vec{E}=\int_S \frac{\rho_s}{۴\pi\varepsilon_۰}\cdot\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^۳}ds \quad \text{توزیع سطحی:} \qquad (۶-۲)$$

$$\vec{E}=\int_V \frac{\rho_v}{۴\pi\varepsilon_۰}\cdot\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^۳}dv \quad \text{توزیع حجمی:} \qquad (۷-۲)$$

مثال ٦:

در شکل زیر میدان الکتریکی را تعیین کنید:



حل:

$$\overrightarrow{dE}=\frac{\rho dx}{۴\pi\varepsilon_۰ R^۲}\hat{a}_R$$

$$\overrightarrow{dE}=dE_x\hat{x}+dE_y\hat{y}$$

$$dE_x=\frac{\rho dx}{۴\pi\varepsilon_۰ R^۲}\cos\theta\ ,\ dE_y=\frac{\rho dx}{۴\pi\varepsilon_۰ R^۲}\sin\theta\ ,\ R=\frac{r}{\sin\theta}\ ,\ x=r\cot g\theta\Rightarrow dx=\frac{-r}{\sin^۲\theta}d\theta$$

$$\Rightarrow E_x = \int dE_x = \frac{\rho}{4\pi\varepsilon_\circ r}\int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}-\beta} -\cos\theta d\theta = \boxed{\frac{\rho}{4\pi\varepsilon_\circ r}(\cos\alpha - \cos\beta)}$$

$$E_y = \int dE_y = \frac{\rho}{4\pi\varepsilon_\circ r}\int_{\frac{\pi}{2}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}-\beta} -\sin\theta d\theta = \boxed{\frac{\rho}{4\pi\varepsilon_\circ r}(\sin\beta - \sin\alpha)}$$

سعی کنید این دو رابطه را به خاطر بسپارید، در حل سوالات کنکور مفید می‌باشد.

مثال ۷:

بار خطی یکنواخت با چگالی ρ_L روی محور در $-a < z < a$ توزیع شده است. $\vec{E}$ میدان الکتریکی در نقطه‌ای با فاصله r از خط بار واقع در صفحه xy چقدر است؟ **(سراسری ۱۳۸۵)**

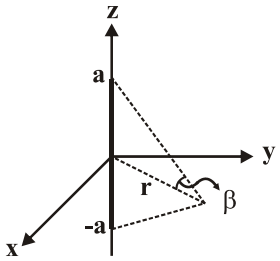
۱) $\vec{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_\circ r}\hat{r}$ ۲) $\vec{E} = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_\circ\sqrt{r^2+a^2}}\hat{r}$ ۳) $\vec{E} = \frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon_\circ\sqrt{r^2+a^2}}\hat{r}$ ۴) $\vec{E} = \frac{\rho_L a}{2\pi\varepsilon_\circ r\sqrt{r^2+a^2}}\hat{r}$

حل: با استفاده از روابط به دست آمده در مثال قبل داریم:

$$\sin\alpha = -\sin\beta = \frac{-a}{\sqrt{a^2+r^2}}\ ,\ \cos\alpha = \cos\beta = \frac{r}{\sqrt{a^2+r^2}}$$

$$\Rightarrow E_z = \frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon_\circ r}(\cos\alpha - \cos\beta) = \circ\ ,\ E_r = \frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon_\circ r}(\sin\alpha - \sin\beta)$$

$$\Rightarrow E_r = \frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon_\circ r}\left(\frac{2a}{\sqrt{a^2+r^2}}\right) = \frac{\rho_L a}{2\pi\varepsilon_\circ r\sqrt{a^2+r^2}}$$



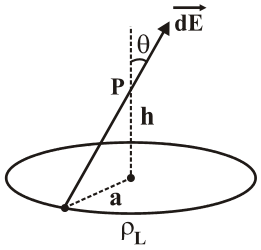
بنابراین گزینه ۴ صحیح است.

نکته: در تعیین زاویه α اشتباه نکنید، یکبار دیگر به شکل مثال قبل توجه کنید.

مثال ۸:

در شکل زیر میدان الکتریکی را در نقطه P به دست آورید.

حل: با توجه به تقارن شکل میدان مؤلفه شعاعی ندارد و برای مؤلفه محوری داریم:



$$dE_z = \left|\overrightarrow{dE}\right|\cos\theta\ ,\ \cos\theta = \frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}$$

$$\left|\overrightarrow{dE}\right| = \frac{\rho_L dl}{4\pi\varepsilon_\circ r^2}\ ,\ r^2 = a^2+h^2\ ,\ dl = ad\varphi$$

$$\Rightarrow dE_z = \frac{\rho_L ah\,d\varphi}{4\pi\varepsilon_\circ(a^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}\ ,\ E_z = \int dE_z = \frac{\rho_L ah}{4\pi\varepsilon_\circ(a^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}\int_\circ^{2\pi} d\varphi = \frac{\rho_L ah}{2\varepsilon_\circ(a^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}$$