

دانش اگر در ثریا هم باشد مردمانی از سرزمین پارس بر آن دست خواهند یافت.

پیامبر اعظم (ص)

شرح جامع

تجزیه و تحلیل سیستم ها

«مهندسی برق»

مولف: زهرا صادقی پورکرمانی

انتشارات ارشد

پیشگفتار ناشر

خداوند بزرگ را شاکریم که فرصتی عنایت فرمود تا بتوانیم قدمی در جهت گسترش علم و فرهنگ کشور عزیزمان برداریم و مسیری هموار را در اختیار مخاطبان و داوطلبان علاقمند به ادامه تحصیل قرار دهیم. از آنجائی که درحوزه کتاب‌های درسی و کمک درسی کارشناسی ارشد کتاب‌های زیادی به رشته تحریر در آمده است با این حال وجود یک مجموعه جامع، دقیق، کامل و دارای رفرنس(منابع) مستند احساس می‌شود.

همیشه دغدغه داشتیم که ای کاش می‌شد تمامی منابع پراکنده و گاهاً دست نایافتنی کنکور در یک مجموعه به گونه‌ای جذاب و شیوا آماده می‌شد و همچنین سوالات دوره‌های قبل کنکور نیز به گونه‌ای تشریحی پاسخ داده می شدند، که خدشه‌ای بر آنها وارد نشود و خیال داوطلبان عزیز آنقدر آسوده باشد که اطلاعات مندرج در پاسخنامه‌ها را برای بهره‌گیری در آزمون خود بکار گیرند. این کار با یاری خداوند بزرگ و همکاری نخبه‌ترین دانشجویان و اساتید کشور در انتشارات ارشد هماهنگ گردید و در تمامی مقاطع تحصیلی از کاردانی به کارشناسی، کارشناسی ارشد و دکتری در حوزهٔ آزمون‌های سراسری – آزاد و پیام نور بسته‌های آموزشی شامل کتاب‌های بانک سوالات و کتاب‌های شرح جامع درس آماده گردید. در تهیه مجموعه‌های فوق‌الذکر از فارغ‌التحصیلان کارشناسی ارشد و دکتری که حائز رتبه‌های تک رقمی کنکور می‌باشند، استفاده کرده‌ایم، تا شما عزیزان بتوانید در راستای افزایش توان علمی خود در جهت نیل به مقصود خویش نایل آیید. بدون تردید می‌توان گفت که برای اولین بار در نظام آموزشی کشور مجموعه‌ای به این سبک عرضه می‌شود که در کیفیت و کمیت بی‌نظیر بوده و تمامی نیازهای دانشجویان و داوطلبان عزیز را پوشش می‌دهد. امید است که استفاده از این مجموعه عزیزان را در جهت موفقیت در آزمون یاری رسانده باشد. در پایان لازم به ذکر است که بی نقصی محض از آن خداوند متعال می‌باشد، بنا براین از تمامی خوانندگان و داوطلبان عزیز خواهشمندیم نظرات سازنده خود را در مورد این کتاب به سایت انتشارات ارشد اعلام نمایند تا ما را در جهت هر چه بهتر آماده کردن این محصولات یاری رسانند.

با تشکر

ناشـــــر

www.arshadbook. ir

پیشگفتار مؤلف

پیش از هر چیز شکر خداوند مهربان را به جا می آورم که به من کمک نمود تا گامی بسیار کوچک در جهت کمک به دانشجویان کشور عزیزم بردارم. کتابی که در دست دارید، شرح جامع درس تجزیه و تحلیل سیستم ها برای آمادگی کنکور کارشناسی ارشد است. همانطور که می دانید مرجع اصلی این درس کتاب سیگنال ها و سیستمها نوشته آلن و اپنهایم. آلن ویلسکی و حمید نواب است. بررسی سؤالات کنکور سال های مختللف نشان می دهد که این کتاب مورد استفاده اکثر طراحان سؤال کنکور است. اما با توجه به اینکه حجم مطالب این کتاب زیاد است، اگر وقت کافی برای مطالعه ندارید، می توانید از کتابی که پیش رو دارید استفاد کنید. چرا که در نگارش این کتاب سعی کرده ام در عین اینکه تمام نکات ضروری برای حل سؤالات کنکور را توضیح می دهم تا حد امکان با اختصار مطالب را بیان کنم. در واقع براساس تجربه و با بررسی سؤالات کنکور، مهم ترین نکات درس تجزیه و تحلیل را انتخاب کرده و در این کتاب به توضیح آنها پرداخته ام.

امیدوارم کتاب حاضر به نحو مؤثری شما را در جهت رسیدن به هدف خود در آزمون کارشناشی ارشد یاری کند. اگر با ارسال پیشنهادات و انتقادات خود به آدرس الکترونیک من (z_Sadeghipour@ee.sharif.edu.) ما را در جهت افزایش کیفیت مطالب این کتاب یاری کنید، بسیار سپاسگزار خواهم بود.

در انتها بر خود واجب می دانم از مدیریت محترم انتشارات ارشد که چاپ این کتاب جز با تلاش های بی شائبه ایشان میسر نبود، تشکر کنم. همچنین از تایپیست ها و دیگر مسئولین محترم انتشارات که با صبر و حوصله بسیار با من همکاری نمودند کمال تشکر را دارم. لازم است از استادان گرانقدرم در دانشگاه صنعتی امیرکبیر و صنعتی شریف که بسیار از ایشان آموختم، تشکر کنم. در نهایت از دوست عزیزم خانم مهندس الهام تقی زاده که در جریان نگارش این کتاب از همفکری های ایشان بسیار بهره بردم تشکر می کنم. و این کتاب را تقدیم می کنم به پدر و مادر عزیزم که همه داشته هایم را مدیون وجود پاکشان هستم.

موفق باشید

زهرا صادقی پورکرمانی

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فصل اول: سیگنال‌ها و سیستم‌ها

مقدمه ۹
۱-۱- خواص اساسی سیستم‌ها ۹
۱-۲- سیستم‌های خطی و تغییر ناپذیر با زمان ۱۳
۱-۳- سیگنالها و سیستم‌های گسسته در زمان ۱۸

فصل دوم:سری فوریه و تبدیل فوریه سیگنال‌های پیوسته

۲-۱- سری فوریه: ۵۱
۲-۱-۱- خواص ضرایب سری فوریه ۵۲
۲-۱-۲- ضرایب سری فوریه بعضی سیگنال‌های مهم ۵۷
۲-۲- تبدیل فوریه سیگنال های پیوسته ۵۸
۳- سیستم‌های LTI در حوزه فرکانس ۶۵

فصل سوم: ضرایب سری فوریه و تبدیل فوریه سیگنال‌های گسسته در زمان

۳-۱- ضرایب سری فوریه سیگنال متناوب گسسته ۹۷
۳-۱-۱- خواص سری فوریه سیگنال گسسته ۹۸
۳-۲- تبدیل فوریه سیگنال‌های گسسته ۱۰۱
۳-۲-۱- خواص تبدیل فوریه سیگنال‌های گسسته ۱۰۱
۳-۲-۲- تبدیل فوریه بعضی سیگنال‌های گسسته مهم ۱۰۳
۳-۳- سیستم‌های LTI گسسته در حوزه فرکانس ۱۰۵

فصل چهارم: تبدیل لاپلاس

۴-۱- تبدیل لاپلاس و چگونگی بدست آوردن آن ۱۲۹
۴-۲- ناحیه همگرایی ۱۳۰
۴-۳- خواص تبدیل لاپلاس ۱۳۳
۴-۵- بدست آوردن عکس تبدیل لاپلاس با استفاده از تجزیه به کسرهای جرئیت ۱۳۶
۴-۶- سیستم‌های LTI و تبدیل لاپلاس ۱۳۷

فصل پنجم: تبدیل z

۵-۴- بدست آوردن عکس تبدیل **z** ۱۵۸

فصل اول

سیگنال ها و سیستم ها

عناوین اصلی

- مقدمه
- خواص اساسی سیستم‌ها
- سیستم‌های خطی و تغییرناپذیر با زمان
- سیگنال‌ها و سیستم‌های گسسته در زمان

فصل اول

سیگنال‌ها و سیستم‌ها

مقدمه

در این فصل به معرفی مقدماتی سیستم‌ها و سیگنال‌ها می‌پردازیم.
سیستم را می‌توان به صورت یک بلوک در نظر گرفت که به ازای یک ورودی مشخص، یک خروجی مشخص را تولید می‌کند. به عنوان مثال یک کارخانه را می‌توان به عنوان یک سیستم در نظر گرفت. در این مثال مواد اولیه ورودی سیستم و محصول نهایی کارخانه، خروجی سیستم است. در واقع هر گوشه از جهان اطرافمان را می‌توانیم به صورت یک سیستم در نظر بگیریم. درس تجزیه و تحلیل سیگنال‌ها و سیستم‌ها، ابزاری در اختیار ما می‌گذارد تا به بررسی مشخصات سیستم‌های مختلف بپردازیم. به کمک این ابزار می‌توانیم خواصی از سیستم را که مورد علاقه ما هستند بررسی کنیم و یا مشخص کنیم که خروجی سیستم به ازای هر ورودی خاص به چه شکل است؟

در این درس همچنین به بررسی سیگنال‌های مختلف و خواص آنها می‌پردازیم، به این علّت که برای بررسی یک سیستم باید شناخت کافی از ورودی و خروجی آن داشته باشیم. ورودی و خروجی هر سیستمی نوعی سیگنال است. به عنوان یک مثال ساده ولتاژ خروجی یک باتری قلمی یک سیگنال است.

در این فصل ابتدا خواص اساسی سیستم ها را بررسی می‌کنیم. سپس به بررسی دستهٔ مهمی از سیستم‌ها که سیستم‌های خطی تغییرناپذیر با زمان هستند، می‌پردازیم. توجه کنید که هر سال تعداد قابل ملاحظه‌ای از سؤال‌های کنکور در درس تجزیه و تحلیل مربوط به این فصل و به خصوص خواص مختلف سیستم‌ها هستند. بنابراین این فصل را با دقت کافی مطالعه نمایید. به خصوص سعی کنید با مفاهیم عمیق مطالب به خوبی آشنا شوید.

۱-۱- خواص اساسی سیستم‌ها

در این بخش به معرفی خواص اساسی سیستم‌ها می‌پردازیم. در هر قسمت تعریفی از خاصیت مورد نظر ارائه می‌گردد همچنین توضیح داده می‌شود که در هر سیستم چگونه می‌توان وجود یا عدم وجود خاصیت مذکور را بررسی کرد.
در تمام مباحث بعدی فرض کنید $x(t)$ ورودی سیستم و $y(t)$ خروجی سیستم است.

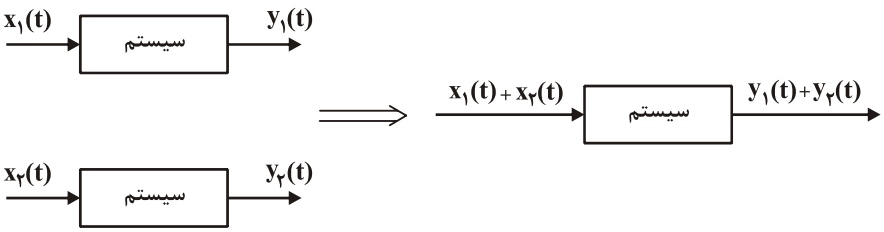
۱- خطی بودن

یک سیستم خطی است، اگر دو رابطه زیر برقرار باشند:

الف) اصل همگنی: در یک سیستم خطی k برابر شدن ورودی باعث k برابر شدن خروجی می‌شود. یعنی اگر $y(t)$ خروجی سیستم به ازای ورودی $x(t)$ باشد، آنگاه اعمال $kx(t)$ به سیستم باعث می‌شود که خروجی برابر با $ky(t)$ شود.

ب) اصل جمع آثار: فرض کنید خروجی سیستم به ازای ورودی $x_1(t)$ برابر با $y_1(t)$ و خروجی این سیستم به ازای $x_2(t)$ برابر با $y_2(t)$ باشد. در این صورت این سیستم خطی است اگر اعمال ورودی $x_1(t)+x_2(t)$ باعث شود که خروجی برابر با $y_1(t)+y_2(t)$ شود.

به شکل زیر توجه کنید:



برای بررسی خطی بودن یک سیستم باید از تعاریف گفته شده استفاده کرد. توجه کنید که خطی بودن یک سیستم را فقط با استفاده از رابطه ورودی- خروجی آن می‌توان تعیین کرد. به عنوان مثال با دانستن پاسخ ضربه نمی توان در مورد خطی بودن سیستم قضاوت کرد.

مثال۱

آیا سیستم $y(t)=5x(t)$ یک سیستم خطی است؟

دو ورودی $x_1(t)$ و $x_2(t)$ را در نظر می‌گیریم. خروجی‌های متناظر را به ترتیب $y_1(t)$، $y_2(t)$ می‌نامیم. با توجه به رابطه ورودی- خروجی سیستم داریم:

$$y_1(t)=5x_1(t)$$

$$y_2(t)=5x_2(t)$$

حال ورودی $x_3(t)$ را به صورت $x_1(t)+x_2(t)$ در نظر می‌گیریم. و خروجی متناظر با آن را $y_3(t)$ می‌نامیم. بنابراین:

$$y_3(t)=5x_3(t)=5x_1(t)+5x_2(t)$$

$$\Rightarrow y_3(t)=y_1(t)+y_2(t)$$

بنابر این سیستم مورد نظر یک سیستم خطی است.

مثال۲

آیا سیستم $y(t)=5x(t)+12$ یک سیستم خطی است؟

دقیقاً مشابه مثال قبل عمل می‌کنیم:

$$\begin{cases} x_1(t)\Rightarrow y_1(t)=5x_1(t)+12 \\ x_2(t)\Rightarrow y_2(t)=5x_2(t)+12 \\ x_3(t)=x_1(t)+x_2(t) \end{cases} \qquad y_3(t)=5x_3(t)+12=5x_1(t)+5x_2(t)+12$$

$$y_1(t)+y_2(t)=5x_1(t)+5x_2(t)+24\neq y_3(t)$$

در نتیجه این سیستم، یک سیستم غیرخطی است.

تذکر: برای قضاوت در مورد خطی بودن یک سیستم دانستن رابطه ورودی- خروجی سیستم ضروری است. مثلاً با دانستن یک ورودی خاص و خروجی متناظر با آن نمی‌توان در مورد خطی بودن سیستم قضاوت کرد.

مثال ۳

اگر ورودی یک سیستم $\delta(t)$ باشد آنگاه خروجی آن $u(t)$ خواهد بود. آیا این سیستم خطی است؟

با استفاده از اطلاعات داده شده نمی‌توان در مورد خطی بودن سیستم قضاوت کرد. مثلاً نمی‌توان گفت که اگر ورودی $k\delta(t)$ به سیستم اعمال شود، خروجی $ku(t)$ خواهد بود یا نه؟ بنابراین اطلاعات مسئله کافی نیست.

۲- تغییرپذیری با زمان: یک سیستم تغییرناپذیر با زمان است اگر شیفت ورودی به اندازه t_0 منجر به شیفت خروجی به اندازه t_0 شود، در غیر اینصورت سیستم تغییرپذیر با زمان است. از نظر فیزیکی یک سیستم تغییرناپذیر با زمان سیستمی است که وابسته به زمان نیست. یعنی در زمانهای مختلف رفتار یکسانی دارد. و تغییر زمان باعث تغییر رفتار آن نمی‌شود.

برای بررسی تغییرپذیری یا تغییرناپذیری یک سیستم با زمان براساس تعریف به صورت زیر عمل کنید.

۱- ورودی $x_1(t)$ را در نظر گرفته و خروجی متناظر با آن را $y_1(t)$ بنامید.

۲- ورودی $x_2(t)$ را به صورت $x_1(t-t_0)$ در نظر گرفته و خروجی متناظر با آن $y_2(t)$ بنامید.

۳- بررسی کنید که آیا $y_2(t)=y_1(t-t_0)$ ؟ اگر این رابطه برقرار باشد سیستم تغییرناپذیر با زمان است و در غیر اینصورت سیستم تغییرپذیر با زمان است.

مثال ۴

آیا سیستم $y(t)=tx(t)$ یک سیستم تغییرناپذیر با زمان است؟

$$x_1(t)\Rightarrow y_1(t)=tx_1(t)$$

حال ورودی $x_2(t)=x_1(t-t_0)$ را در نظر می‌گیریم.

$$y_2(t)=tx_2(t)=tx_1(t-t_0)$$

$$\Rightarrow y_2(t)\neq y_1(t-t_0)$$

$$y_1(t-t_0)=(t-t_0)x_1(t-t_0)$$

بنابراین سیستم تغییرپذیر با زمان است.

۳- علّی بودن: یک سیستم علّی است، اگر خروجی سیستم در هر لحظه به ورودی سیستم در لحظات آینده وابسته نباشد. به عنوان یک مثال ساده یک کارخانه را در نظر بگیرید. دقت کنید که محصول نهایی کارخانه در هر روز فقط به مواد اولیه‌ای که در همان روز یا روزهای قبلی وارد کارخانه شده‌اند، بستگی دارد. این محصول ارتباطی به مواد اولیه‌ای که فردا وارد کارخانه می‌شوند، ندارد. همه سیستم‌های واقعی و فیزیکی که در اطراف خود مشاهده می‌کنیم، سیستم‌های علّی هستند. در واقع یک سیستم غیر علّی وجود خارجی ندارد و فقط برای بررسی و تجزیه و تحلیل سیستم‌ها معرفی می‌شود. برای بررسی علّی بودن یک سیستم دقیقاً می‌توان از تعریف استفاده کرد. یعنی بررسی کنید که آیا مقدار خروجی در هر لحظه به ورودی در لحظات بعد وابسته است یا نه؟

مثال ۵

آیا سیستم $y(t)=x(t+1)$ یک سیستم علّی است؟

توجه کنید که در این سیستم مثلاً $y(1)=x(2)$ یعنی خروجی در لحظهٔ $t=1$ بـه ورودی در لحظـه $t=2$ کـه لحظـهٔ بعدی $t=1$ است، وابسته است، بنابراین مشخص است که این سیستم غیر علّی است.

مثال ۶

آیا سیستم $y(t)=x(\sin t)$ یک سیستم علّی است؟

در این مثال $t=\frac{-\pi}{2}$ را در نظر بگیرید.

$$y(-\frac{\pi}{2})=x\left(\sin(-\frac{\pi}{2})\right)=x(-1)$$

بنابراین y در لحظه $-\frac{\pi}{2}$ به x(t) در لحظه ۱- وابسته است از آنجایی که $t=-1$ جزء لحظـات بعـدی $t=-\frac{\pi}{2}$ اسـت این سیستم غیرعلّی است.

۴- با حافظه بودن: یک سیستم بی‌حافظه است، اگر خروجی آن در هر لحظه فقط و فقط به ورودی در همان لحظـه وابـسته باشد. به عبارت دیگر، در یک سیستم بدون حافظه خروجی در هر لحظه نه به ورودی در لحظات قبلی و نه به ورودی در لحظات بعدی وابسته است.

مثال ۷

آیا سیستم $y(t)=x^2(t)$ یک سیستم بدون حافظه است؟ این سیستم یک سیستم بدون حافظه است چون خروجی در هر لحظهٔ t فقط به ورودی در همان لحظه وابسته است.

مثال ۸

آیا سیستم $y(x)=x(t^2)$ یک سیستم بدون حافظه است؟

این سیستم حافظه دار است. لحظه $t=2$ را در نظر بگیرید در این صورت:

$$y(2)=x(2^2)\Rightarrow y(2)=x(4)$$

بنابراین خروجی در لحظه $t=2$ وابسته به ورودی در لحظه‌ای دیگر است.

۵- پایداری: یک سیستم پایدار است در صورتی که هر ورودی محدود در این سیستم منجر به یک خروجی محدود شود. در اینجا منظور از ورودی و خروجی محدود سیگنالهایی هستند که دامنه آنها بینهایت نیست. برای اثبات اینکه یک سیستم پایدار است باید نشان دهید که هر ورودی با دامنه محدود در این سیستم منجر به یک خروجی با دامنه محدود می‌شود. و برای اینکه نشان دهید یک سیستم ناپایدار است کافی است یک ورودی با دامنهٔ محدود بیابید که خروجی سیستم بـه ازای آن دامنه نامحدودی داشته باشد.

مثال ۹

آیا سیستم $y(t)=e^{jx(t)}$ پایدار است؟

توجه کنید که دامنهٔ خروجی در این سیستم همواره برابر یک است. (چون دامنهٔ $e^{j\theta}$ برابر یک است.)بنـابراین در ایـن سیستم دامنه خروجی به ازای هر ورودی، محدود است، در نتیجه این سیستم پایدار است.

مثال۱۰

آیا سیستم $y(t)=\int_{-\infty}^{t} x(t)dt$ **پایدار است؟**

در این مثال سیگنال $x(t)=۱$ را در نظر بگیرید. مشخص است که دامنه x(t) همواره محدود است. در این حالت:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t} x(t)d\tau=\int_{-\infty}^{t} ۱d\tau=\tau\Big|_{-\infty}^{t}=\tau-(-\infty)=\infty$$

مشاهده کردید که به ازای یک ورودی محدود، خروجی دامنه نامحدود دارد؛ بنابراین این سیستم ناپایدار است.

۶- **معکوس‌پذیری:** یک سیستم معکوس‌پذیر است اگر هر دو ورودی متفاوت در آن سیستم، منجر به دو خروجی متفاوت شوند برای نشان دادن اینکه یک سیستم معکوس ناپذیر است کافی است دو ورودی متفاوت بیابید که به ازای آنها خروجی سیستم یکسان باشد. به این منظور سعی کنید به لحظاتی از خروجی توجه کنید که در آنها خروجی به ورودی وابسته نیست. به مثال‌های زیر توجه کنید.

مثال۱۱

آیا سیستم $y(t)=\begin{cases}x(t) & t\geq ۲\\ ۰ & t<۲\end{cases}$ **یک سیستم معکوس‌پذیر است؟**

در این سیستم خروجی در لحظات $t<۲$ به ورودی وابسته نیست. بنابراین اگر دو ورودی در نظر بگیریم که در $t<۲$ متفاوت هستند و در $t\geq ۲$ یکسان هستند می‌توانیم معکوس ناپذیر بودن سیستم را نشان دهیم.

به عنوان مثال ورودی‌های زیر را در نظر بگیرید:

$$x_۱(t)=\delta(t+۸)\Rightarrow y_۱(t)=۰$$

$$x_۲(t)=\delta(t+۶)\Rightarrow y_۲(t)=۰$$

مشاهده کردید که دو ورودی متفاوت منجر به خروجی یکسان شدند، بنابراین سیستم معکوس‌ناپذیر است.

مثال۱۲

آیا سیستم $y(t)=x(t)\cos\left(\frac{\pi}{۲}t\right)$ **یک سیستم معکوس‌پذیر است؟**

در این سیستم در لحظاتی که $\cos(\frac{\pi}{۲}t)=۰$ است، مقدار ورودی تأثیری در خروجی ندارد. مقدار خروجی در این لحظات صرفنظر از اینکه ورودی چه باشد، برابر با صفر است. بنابراین اگر دو ورودی را در نظر بگیرید که در تمام لحظات به جز در $t=۱,۳,۵,۷,...$ با هم برابرند، خروجی سیستم به ازای آنها برابر خواهد بود.بنابراین سیستم معکوس‌ناپذیر است. دقت کنید که در هر دو مثال فوق سیستم‌ها به گونه‌ای هستند که در بعضی لحظات سیستم اطلاعات ورودی را از بین می‌برد. مثلاً در مثال اول سیستم اطلاعات ورودی را در $t<۲$ از بین می‌برد. بنابراین سیستم معکوس‌ناپذیر است.

۱-۲- سیستم‌های خطی و تغییر ناپذیر با زمان

در بین کلیه سیستم ها، سیستم‌های خطی تغییرناپذیر با زمان (LTI) دارای اهمیت ویژه‌ای هستند. این سیستم‌ها از این جهت اهمیت دارند که رابطه بین ورودی و خروجی آنها با دانستن پاسخ ضربه به صورت زیر مشخص می‌شود.

$$y(t)=x(t)*h(t)$$

در واقع در یک سیستم (LTI) دانستن پاسخ ضربه برای مشخص کردن سیستم به صورت کامل کفایت می‌کند. در اینجا مناسب است که به بیان چند نکته در مورد عمل کانولوشن و تابع ضربه بپردازیم .

کانولوشن: کانولوشن بین دو سیگنال $h(t),x(t)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t-\tau)h(\tau)dt$$

عمل کانولوشن دارای خواص زیر است:

۱- جابجایی:

$$x(t)*h(t)=h(t)*x(t)$$

۲- شرکت‌پذیری:

$$x_1(t)*\left[x_2(t)*x_3(t)\right]=\left[x_1(t)*x_2(t)\right]*x_3(t)$$

۳- خاصیت پخشی کانولوشن روی جمع:

$$x_1(t)*\left[x_2(t)+x_3(t)\right]=x_1(t)*x_2(t)+x_1(t)*x_3(t)$$

۴- اگر داشته باشیم $y(t)=x(t)*h(t)$ آنگاه رابطهٔ زیر برقرار است:

$$y(t+t_3)=x(t+\tau_1)*h(t+\tau_2)\Leftrightarrow \tau_3=\tau_1+\tau_2$$

یعنی اگر $x(t)$ به اندازهٔ τ_1 و $h(t)$ به اندازه τ_2 شیفت داده شود $y(t)$ به اندازه $\tau_1+\tau_2$ شیفت پیدا می‌کند.

۵- اگر داشته باشیم $y(t)=x(t)*h(t)$ آنگاه رابطه زیر برقرار است:

$$y'(t)=x'(t)*h(t)$$

یعنی اگر از $x(t)$ مشتق بگیریم از $y(t)$ هم مشتق گرفته می‌شود.

دقت کنید که این خاصیت یکی از خواص مهم سیستم‌های LTI است، یعنی اگر از ورودی یک سیستم LTI مشتق گرفته شود، از خروجی آن هم مشتق گرفته می‌شود.

$$y(t)=(\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau*h'(t)=\int_{-\infty}^{t}\left[x'(\tau)*h(\tau)\right]d\tau=x'(t)*\int_{-\infty}^{t}h(\tau)d\tau$$

روابط بالا به این معنی است که هنگام محاسبه کانولوشن دو سیگنال می‌توان از یکی مشتق گرفت و از دیگری انتگرال گرفت و سپس کانولوشن را محاسبه کرد. در بعضی از مسائل ممکن است این روش ساده‌تر باشد. و مسئله را سریعتر حل کند.

دو نکته در مورد کانولوشن:

۱- اگر سیگنال $x(t)$ دارای عرض T_x باشد یعنی در فاصله‌ای به اندازه T_x مقدار مخالف صفر داشته باشد و سیگنال $h(t)$ دارای عرض T_h باشد آنگاه عرض سیگنال $y(t)=x(t)*h(t)$ برابر با مجموع عرض پالس $x(t)$ و $h(t)$ است یعنی:

$$T_y=T_x+T_h$$

در سیگنالهای گسسته، اگر سیگنال $x[n]$ دارای عرض N_x و سیگنال $x[n]$ دارای عرض N_h باشد، آنگاه عرض سیگنال $y[n]=x[n]*h[n]$ برابر است با N_x+N_h-1.

۲- فرض کنید $y(t)=x(t)*h(t)$، تعاریف زیر را در نظر بگیرید:

$$A_x=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)dt \qquad A_h=\int_{-\infty}^{\infty}h(t)dt \qquad A_y=\int_{-\infty}^{\infty}y(t)dt$$

در این صورت رابطه زیر برقرار است:

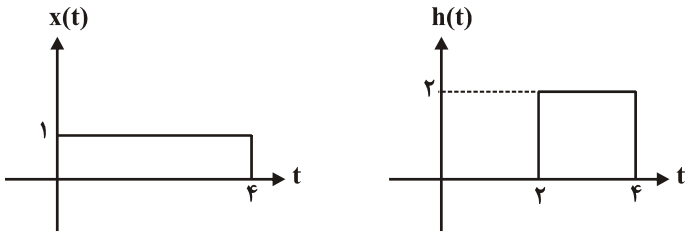
$$A_y=A_x.A_h$$

یعنی سطح زیر منحنی $y(t)$ برابر است با حاصلضرب سطح زیر منحنی $x(t)$ و سطح زیر منحنی $h(t)$.

محاسبه کانولوشن بین دو سیگنال

۱- روش ترسیمی: این روش را با یک مثال توضیح می‌دهیم.

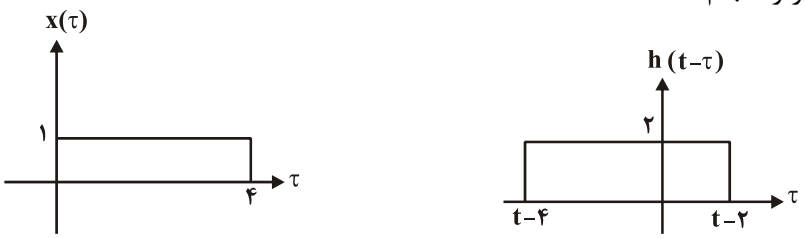
دو سیگنال x(t) ، h(t) را به صورت زیر در نظر بگیرید و $y(t)=x(t)*h(t)$ را محاسبه کنید.



حل:می دانیم که y(t) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t-\tau)h(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

بنابراین باید یکی از سیگنالها را نسبت به محور عمودی قرینه کرده و به اندازه t شیفت دهیم. بهتر است این کار را برای سیگنالی که دوره زمانی محدود دارد، انجام دهیم. در اینجا چون هر دو سیگنال x(t) و h(t) دوره زمانی محدودی دارند بـرای هر کدام می‌توان این کار را انجام داد.



دقت کنید که شکل $h(t-\tau)$ به مقدار t بستگی دارد.

بنابراین باید حاصلضرب این دو سیگنال و انتگرال حاصل را با توجه به مقادیر مختلف t محاسبه کرد. حالات زیر را در نظر بگیرید:

۱- اگر $t-۲$ کوچکتر از صفر باشد، دو سیگنال همپوشانی ندارند و حاصلضرب و انتگرال حاصل برابر صفر است.

$$t-۲<۰\Rightarrow t<۲:\quad y(t)=۰$$

۲- حال اگر $t-۲$ بزرگتر از صفر و در عین حال کوچکتر از ۴ باشد و $t-۴$ هم کوچکتر از صفر باشد، آنگاه دو تابع در فاصله ۰ تا $t-۲$ همپوشانی دارند.

$$\begin{cases}۰<t-۲<۴\Rightarrow ۲<t<۶\\ t-۴<۰\Rightarrow\ t<۴\end{cases}\Rightarrow ۲<t<۴$$

$$y(t)=\int_{۰}^{t-۲}۲dt=۲(t-۲)$$

۳- اگر $t-۲$ کوچکتر از ۴ باشد و $t-۴$ بزرگتر از صفر باشد، دو تابع در فاصله $t-۴$ تا $t-۲$ همپوشانی دارند.

$$\begin{cases}t-۲<۴\Rightarrow t<۶\\ t-۴>۰\Rightarrow t>۴\end{cases}\Rightarrow ۴<t<۶$$

$$y(t)=\int_{t-۴}^{t-۲}۲dt=۲(t-۲-t+۴)=۴$$

۴- اگر $t-۲$ بزرگتر از ۴ باشد و $t-۴$ کوچکتر از ۴ باشد، دو تابع در فاصله $t-۴$ تا ۴ همپوشانی دارند.

$$\begin{cases} t-۲\rangle ۴ \Rightarrow t\langle ۶ \\ \\ t-۴\langle ۴ \Rightarrow t\langle ۸ \end{cases} \Rightarrow ۶\langle t\langle ۸$$

$$y(t)=\int_{t-۴}^{۴} ۲dt = ۲(۴-t+۴) = ۲(۸-t)$$

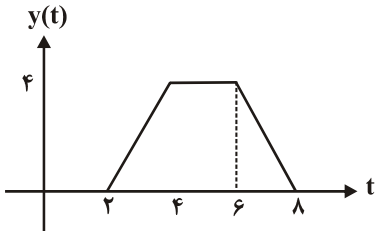
۵- در نهایت اگر $t-۴$ هم بزرگتر از ۴ باشد. دو تابع همپوشانی ندارند.

$$t-۴\rangle ۴ \Rightarrow t \geq ۸$$

$$y(t)=۰$$

با استفاده از حالات بررسی شده می‌توان y(t) را به صورت زیر نوشت:

$$y(t)=\begin{cases} ۰ & t\langle ۲ \\ ۲t-۴ & ۲\langle t\langle ۴ \\ ۴ & ۴\langle t\langle ۶ \\ ۲(۸-t) & ۶\langle t\langle ۸ \\ ۰ & t\rangle ۸ \end{cases}$$



بعداز حل مثال بالا مناسب است که به نکتهٔ زیر توجه کنید.

📖 **نکته:** حاصل کانولوشن دو پالس مستطیلی همواره یک تابع ذوزنقه‌ای است. قاعده کوچک این ذوزنقه به اندازه اختلاف عرض پالس دو سیگنال مستطیلی است. (در مثال بالا این مقدار برابر با ۲ بود.) و قاعده بزرگ این ذوزنقه برابر با مجموع عرض پالس‌های دو سیگنال مستطیلی است. (در مثال بالا این مقدار برابر با ۶ بود.) اگر دو پالس مستطیلی دارای عرض یکسان باشند، قاعده کوچک ذوزنقه برابر صفر می‌شود. در واقع ذوزنقه تبدیل به یک پالس مثلثی می‌شود.

۲- روش جبری: مثال قبل را در نظر بگیرید. می‌توانیم دو تابع x(t) و h(t) را به صورت فرم بسته به شکل زیر نمایش دهیم.

$$x(t)=u(t)-u(t-۴)$$

$$h(t)=۲\big(u(t-۲)-u(t-۴)\big)$$

$$\Rightarrow y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau$$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} ۲\big[u(t-\tau)-u(t-\tau-۴)\big]\big[u(\tau-۲)-u(\tau-۴)\big]d\tau$$

$$u(t-\tau)-u(t-\tau-۴)=\begin{cases} ۱ & t-\tau-۴<۰\ ,\ t-\tau>۰ \\ ۰ & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

$$u(\tau-۲)-u(\tau-۴)=\begin{cases} ۱ & \tau>۲, \tau<۴ \\ ۰ & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

همانطور که مشاهده کردید باید حدودی از τ را تعیین کردکه به ازای آن هر دو عبارت داخل انتگرال همزمان غیرصفر باشند. حال به بررسی حدود بدست آمده می‌پردازیم:

$$\begin{cases} ۱)\ t-\tau>۰ \quad \Rightarrow \quad \tau<t \\ ۲)\ t-\tau-۴<۰ \quad \Rightarrow \quad \tau>t-۴ \end{cases} \Rightarrow t-۴<\tau<t$$

$$\begin{cases} ۳)\ \tau>۲ \\ ۴)\ \tau<۴ \end{cases} \Rightarrow\ ۲<\tau<۴$$

بنابراین دو شرط $t-۴<\tau<t$,$۲<\tau<۴$ باید همزمان برقرار باشند. حال حالات مختلف زیر را در نظر می‌گیریم:

۱) $t-۴<۲ \quad \Rightarrow t<۶:\ ۲<\tau<t \Rightarrow \int_{۲}^{t} ۲d\tau = ۲(t-۲)$

$۲<\tau<۴$

۲) $t-۴>۲ \quad \Rightarrow t>۶:\ t-۴<\tau<۴ \Rightarrow \int_{t-۴}^{۴} ۲d\tau = ۲(۴-t+۴) = ۲(۸-t)$

$t-۴<۴ \Rightarrow t<۸$

۳) $t<۴$

$\Rightarrow ۴<t<۶ : ۲<\tau<۴ : \int_{۲}^{۴} ۲d\tau = ۴$

$t-۴>۲$

مشاهده نمودید که در این مثال خاص استفاده از روش ترسیمی ساده‌تر از روش جبری است و احتمال اشتباه در آن کمتر است.

تابع ضربه: تابع ضربه $\delta(t-t_۰)$ تابعی است که در همه نقاط به جز در $t=t_۰$ مقدار صفر دارد. این تابع در $t=t_۰$ مقدار بینهایت دارد و $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_۰)dt = ۱$ البته این تعریف دقیق تابع ضربه نیست، برای مطالعهٔ تعریف دقیق تابع ضربه می‌توانید به کتابهای ریاضی مراجعه کنید. در اینجا پاره‌ای از خواص مهم تابع ضربه را که برای ما مفید هستند، بیان می‌کنیم.

$$۱) \int_{t_۱}^{t_۲} x(t)\delta(t-t_۰)dt = \begin{cases} x(t_۰) & t_۱<t_۰<t_۲ \\ ۰ & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

$$۲)\ x(t)\delta(t-t_۰) = x(t_۰)\delta(t-t_۰)$$

$$۳)\ x(t)*\delta(t-t_۰) = x(t-t_۰)$$

یعنی کانولوشن یک سیگنال با $\delta(t-t_۰)$ باعث می‌شود که سیگنال مورد نظر به اندازه $t_۰$ شیفت پیدا کند.

$$۴)\delta(\alpha t) = \frac{۱}{|\alpha|}\delta(t)$$

گفتیم که پاسخ ضربه یعنی پاسخ یک سیستم به ورودی ضربه به صورت کامل مشخص کنندهٔ یک سیستم LTI است. به عنوان مثال خواص اساسی یک سیستم LTI را می‌توان با استفاده از پاسخ ضربه بررسی کرد. در اینجا مجدداً خواص اساسی سیستم‌ها را مرور می‌کنیم و بیان می کنیم که هر خاصیت معادل چه شرطی بر روی پاسخ ضربه است.

۱- علّی بودن: یک سیستم LTI علّی است اگر و فقط اگر برای پاسخ ضربه آن داشته باشیم.

$h(t) = ۰ \qquad t<۰$

یعنی پاسخ ضربه برای tهای منفی مقدار صفر داشته باشد.

۲- با حافظه بودن: یک سیستم LTI بی‌حافظه است اگر و فقط اگر پاسخ ضربه آن به صورت زیر باشد:

$$h(t) = k\delta(t)$$

در رابطهٔ بالا k یک ضریب ثابت است. در غیر اینصورت سیستم، حافظه‌دار است.

۳- پایداری: یک سیستم LTI پایدار است اگر پاسخ ضربه آن مطلقاً انتگرال‌پذیر باشد یعنی:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,dt < \infty$$

۴- معکوس‌پذیری: یک سیستم LTI با پاسخ ضربه h(t) معکوس‌پذیر است، اگر بتوان $h_1(t)$ را یافت به طوری که:

$$h(t) * h_1(t) = \delta(t)$$

در این صورت $h_1(t)$ پاسخ ضربه سیستم معکوس است. دقت کنید که اگر یک سیستم LTI معکوس پذیر باشد آنگاه سیستم معکوس آن هم LTI است. در فصل‌های آینده خواهیم دید که این شرط به شرط ساده‌تری بر روی تابع تبدیل سیستم تبدیل می‌شود. اگر فرض کنیم تابع تبدیل سیستم مورد نظر H(s) است، آنگاه سیستم معکوس‌پذیر است اگر H(s) در هیچ نقطه‌ای صفر نباشد.

در یک سیستمLTI نکات زیر در مورد خواص اساسی سیستم صادق هستند.

۱- علّیت برای سیستم‌های خطی معادل است با اینکه برای هر زمان to و هر ورودی x(t) که $x(t) = 0\ t < t_0$ خروجی متناظر با x(t) برای $t < t_0$ صفر باشد.

۲- معکوس‌پذیری برای سیستم‌های خطی معادل است با اینکه تنها ورودی که خروجی تمام صفر تولید می‌کند، ورودی تمام صفر است.

معادلات دیفرانسیل خطی می‌توانند بیانگر یک سیستم LTI باشند. اما نکته مهم این است که هر معادله دیفرانسیل (یا دیفرنس) خطی لزوماً بیانگر یک سیستم LTI نیست. شرایط اولیه معادله دیفرانسیل تعیین کننده LTI بودن یا نبودن سیستم هستند. به نکات زیر توجه کنید:

۱- یک معادله دیفرانسیل خطی بیانگر یک سیستم LTI است اگر دارای شرایط آرامش اولیه باشد. شرایط آرامش اولیه به این معنی است که قبل از اعمال ورودی، خروجی برابر با صفر است.

۲- اگر شرایط اولیه معادله غیرصفر باشند مثلاً $y(1) = 1$ سیستم نه خطی و نه تغییر ناپذیر با زمان است.

۳- اگر شرایط اولیه صفر باشد ولی در زمان مشخصی که مستقل از لحظه اعمال ورودی است اعمال شود، مثلاً $y(1) = 0$، سیستم خطی است اما تغییر پذیر با زمان است. در این صورت سیستم علّی هم نیست.

۱-۳- سیگنالها و سیستم‌های گسسته در زمان

سیستم‌های فیزیکی همگی سیستم‌های پیوسته در زمان هستند. اما عموماً سیگنال های پیوسته برای پردازش در کامپیوتر با نمونه برداری تبدیل به سیگنال های گسسته می‌شوند. برای پردازش این سیگنال ها لازم است که سیستم گسسته معادل یک سیستم پیوسته واقعی هم مورد بررسی قرار گیرد. دقت کنید که همه آنچه در مورد سیستم‌های پیوسته گفته شد در مورد سیستم‌های گسسته هم برقرار است. البته در اینجا دو تفاوت مهم وجود دارد.

۱- انتگرال به جمع تبدیل می‌شود.

۲- تابع ضربه گسسته دیگر مقدار بی‌نهایت ندارد.یعنی $\delta[n-n_o]$ تابعی است که در همه نقاط به جـز در $n=n_o$ دامنـه آن برابر با صفر است و در نقطه $n_.$ مقدار ی دارد. تمام خواص تابع ضربه پیوسته در مورد تـابع ضـربه گسـسته هـم برقـرار هستند به جز خاصیت زیر:

$$\delta[\alpha n]=\delta[n]$$

گفتیم که در سیستم‌های گسسته انتگرال به جمع تبدیل می‌شود. مثلاً کانولوشن دو سیگنال $h[n],x[n]$ به صورت زیـر نوشته می‌شود:

$$y[n]=x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[n-k]h[k]$$

توجه کنید که در بعضی موارد تفاوت‌های اساسی بین سیگنالهای گسسته و پیوسته وجود دارد. برای بررسی یکی از ایـن تفاوت‌ها به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۱۳

آیا سیگنال $x(t)=\cos(\frac{\pi}{۸}t^۲)$ **متناوب است؟ سیگنال** $x[n]=\cos(\frac{\pi}{۸}n^۲)$ **چطور؟**

چنانکه می‌دانیم سیگنال $x(t)=\cos(\frac{\pi}{۸}t^۲)$ متناوب نیست. اما در مورد سـیگنال $x[n]=\cos(\frac{\pi}{۸}n^۲)$ روابـط زیـر را در نظر بگیرید:

$$x[n+N_.]=\cos(\frac{\pi}{۸}(n+N_.)^۲)=\cos(\frac{\pi}{۸}n^۲+\frac{\pi}{۴}nN_.+\frac{\pi}{۸}N_.^۲)$$

می‌دانیم برای اینکه سیگنال $x[n]$ متناوب باشد، باید داشته باشیم:

$$x[n+N_.]=x[n]\Rightarrow$$

$$\cos(\frac{\pi}{۸}n^۲+\frac{\pi}{۴}nN_.+\frac{\pi}{۸}N_.^۲)=\cos(\frac{\pi}{۸}n^۲)$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{۴}nN_.+\frac{\pi}{۸}N_.^۲=۲k\pi$$

$$\Rightarrow \frac{nN_.}{۴}+\frac{N_.^۲}{۸}=۲k$$

بنابر این کافی است کوچکترین $N_.$ را پیدا کنیم کـه بـه ازای آن $\frac{nN_.}{۴}+\frac{N_.^۲}{۸}$ عـددی زوج شـود. یعنـی $N_.=۸$ پـس سیگنال $x[n]$ متناوب است. در حالی که ممکن بود با توجه به سیگنال پیوسته متناظر یعنی $x(t)$ نتیجه‌گیری کنید کـه $x[n]$ نامتناوب است.