
بسم الله الرحمن الرحيم

شرح جامع

دینامیک و ارتعاشات (دینامیک، ارتعاشات)

«مهندسی مکانیک»

مولف: سعید خدایگان

انتشارات ارشد

پیشگفتار ناشر

خداوند بزرگ را شاکریم که فرصتی عنایت فرمود تا بتوانیم قدمی در جهت گسترش علم و فرهنگ کشور عزیزمان برداریم و مسیری هموار را در اختیار مخاطبان و داوطلبان علاقمند به ادامه تحصیل قرار دهیم. از آنجائی که درحوزه کتاب‌های درسی و کمک درسی کارشناسی ارشد کتاب‌های زیادی به رشته تحریر در آمده است با این حال وجود یک مجموعه جامع، دقیق، کامل و دارای رفرنس(منابع) مستند احساس می‌شود.

همیشه دغدغه داشتیم که ای کاش می‌شد تمامی منابع پراکنده و گاهاً دست نایافتنی کنکور در یک مجموعه به گونه‌ای جذاب و شیوا آماده می‌شد و همچنین سوالات دوره‌های قبل کنکور نیز به گونه‌ای تشریحی پاسخ داده می شدند، که خدشه‌ای بر آنها وارد نشود و خیال داوطلبان عزیز آنقدر آسوده باشد که اطلاعات مندرج در پاسخنامه‌ها را برای بهره‌گیری در آزمون خود بکار گیرند. این کار با یاری خداوند بزرگ و همکاری نخبه‌ترین دانشجویان و اساتید کشور در انتشارات ارشد هماهنگ گردید و در تمامی مقاطع تحصیلی از کاردانی به کارشناسی، کارشناسی ارشد و دکتری در حوزهٔ آزمون‌های سراسری – آزاد و پیام نور بسته‌های آموزشی شامل کتاب‌های بانک سوالات و کتاب‌های شرح جامع درس آماده گردید. در تهیه مجموعه‌های فوق‌الذکر از فارغ‌التحصیلان کارشناسی ارشد و دکتری که حائز رتبه‌های تک رقمی کنکور می‌باشند، استفاده کرده‌ایم، تا شما عزیزان بتوانید در راستای افزایش توان علمی خود در جهت نیل به مقصود خویش نایل آیید. بدون تردید می‌توان گفت که برای اولین بار در نظام آموزشی کشور مجموعه‌ای به این سبک عرضه می‌شود که در کیفیت و کمیت بی‌نظیر بوده و تمامی نیازهای دانشجویان و داوطلبان عزیز را پوشش می‌دهد. امید است که استفاده از این مجموعه عزیزان را در جهت موفقیت در آزمون یاری رسانده باشد. در پایان لازم به ذکر است که بی نقصی محض از آن خداوند متعال می‌باشد، بنا براین از تمامی خوانندگان و داوطلبان عزیز خواهشمندیم نظرات سازنده خود را در مورد این کتاب به سایت انتشارات ارشد اعلام نمایند تا ما را در جهت هر چه بهتر آماده کردن این محصولات یاری رسانند.

با تشکر

ناشـــــر

www.arshadbook. ir

پیشگفتار مولف

دینامیک و ارتعاشات مکانیکی از جذاب‌ترین مباحث مطرح در رشته مهندسی مکانیک هستندکه دانشجویان در دوره‌ی کارشناسی با اصول این علوم آشنا می‌گردند.

این کتاب در راستای مهیا نمودن یک مجموعه‌ی جامع از مباحث دینامیک و ارتعاشات مکانیکی جهت آمادگی دانشجویان علاقمند ورود به دوره‌ی تحصیلات تکمیلی، تألیف گردیده است.

در نگارش این کتاب سعی شده است از بیان توضیحات اضافی و مطالب خسته کننده پرهیز شود و در عین حال جزئیات و نکات لازم به زبانی شیوا بیان گردد. برای تفهیم بهتر مطالب مسائل متنوعی در قالب سوالات چهارگزینه‌ای در متن و پایان هر فصل ارائه شده است.

در ارائه پاسخ مسائل سعی شده است مطالب به اندازه‌ی کافی گویا، مشروح و کامل باشد: به طوریکه مخاطب پس از مطالعه شرح درس و مرور مسائل بر مفاهیم مطرح شده کاملاً مسلط گردد.

دانشجویان سالهای آخر دوره کارشناسی که مایل‌اند در کنکور کارشناسی ارشد شرکت کنند و همچنین دانشجویان علاقمندی که دروس دینامیک و ارتعاشات مکانیکی را گذرانده یا در حال گذراندن هستند و تمایل دارند آموخته‌های خود را تکمیل و یا مورد ارزیابی قرار دهند از این کتاب بهره کافی را خواهند برد.

علیرغم تمام تلاشی که مؤلف جهت تألیف این کتاب انجام داده است، بی‌شک کمبودهایی وجود دارد که امید است در چاپهای بعدی برطرف گردد. بنابراین مؤلف بسیار خوشنود خواهد شد تا از نظرات و پیشنهادات دانشجویان و اساتید محترم جهت رفع نواقص این کتاب در چاپ‌های بعدی استفاده کند.

امید است این اثر ابزاری سودمند در رفع نیاز دانشجویان گرامی و علاقمندان به ادامه‌ی مسیر تعالی دانش و معرفت قرار گیرد.

با سپاس

سعید خدایگان

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

پیشگفتار ناشر ۳

پیشگفتار مولف ۴

بخش اول: دینامیک

فصل اول: سینماتیک ذرات مادی

۱-۱- مقدمه ۱۳

۱-۲- حرکت مستقیم الخط ۱۴

۱-۳- تعیین حرکت یک ذره ۱۶

۱-۴- حرکت چندین ذره ۱۹

۱-۵- حرکت در صفحه (حرکت دوبعدی) ۲۲

فصل دوم: سینتیک ذره

۲-۱- مقدمه ۴۰

۲-۲- قانون دوم نیوتن ۴۰

۲-۳- اندازه حرکت خطی یک ذره ۴۱

۲-۴- معادلات حرکت ۴۱

۲-۵- اصل دالامبر ـ تعادل دینامیکی ۴۵

۲-۶- پایستاری اندازه حرکت زاویه‌ای ۴۹

۲-۷- سینتیک ذره‌ها ـ روش‌های انرژی و اندازه حرکت ۵۰

۲-۸- اصل ضربه و اندازه حرکت ۵۸

فصل سوم: سیستم ذرات

۳-۱- مقدمه ۸۰

۳-۲- قوانین نیوتن در حرکت سیستمی از ذرات ۸۰

۳-۳- اندازه حرکت خطی و اندازه حرکت زاویه‌ای سیستم ذرات ۸۲

۳-۴- حرکت مرکز جرم سیستم ذرات ۸۳

۳-۵- پایستاری اندازه حرکت خطی و زاویه‌ای برای سیستم ذرات ۸۴

۳-۶- انرژی جنبشی سیستم ذرات ۸۶

۳-۷- اصل کار و انرژی ـ پایستاری انرژی برای سیستم ذرات ۸۶

۳-۸- برخورد ۸۷

فصل چهارم: سینماتیک اجسام صلب

۴-۱- مقدمه ۱۱۰

عنوان صفحه

۴-۲- انتقال اجسام صلب ۱۱۰
۴-۳- حرکت چرخشی حول محور ثابت..... ۱۱۱
۴-۴- حرکت صفحه‌ای کلی ۱۱۴
۴-۵- آهنگ تغییر یک بردار نسبت به دستگاه مختصات چرخان ۱۲۱
۴-۶- حرکت صفحه‌ای یک ذره نسبت به دستگاه مختصات چرخان..... ۱۲۲
۴-۷- حرکت حول نقطهٔ ثابت ۱۲۴
۴-۸- حرکت کلی..... ۱۲۴

فصل پنجم: سینتیک اجسام صلب در صفحه

۵-۱- معادلات حرکت جسم صلب در صفحه ۱۳۷
۵-۲- معادلات حرکت جسم صلب در صفحه ۱۳۸
۵-۳- حرکت صفحه‌ای مقید ۱۴۱
۵-۴- تعادل دینامیکی: اصل دالامبر ۱۴۵
۵-۵- سینتیک اجسام صلب صفحه: روش کار ـ انرژی ۱۴۷
۵-۶- توان در حرکت صفحه‌ای اجسام صلب ۱۵۰
۵-۷- اندازه حرکت خطی و زاویه‌ای اجسام صلب در حرکت صفحه‌ای ۱۵۰
۵-۸- حرکت صفحه‌ای اجسام صلب متصل به هم ۱۵۲
۵-۹- پایستاری اندازه حرکت خطی و زاویه‌ای ۱۵۲

فصل ششم: سینتیک اجسام صلب در سه بعد

۶-۱- مقدمه ۱۷۱
۶-۲- اندازه حرکت زاویه‌ای جسم صلب در سه بعد ۱۷۱
۶-۳- حرک جسم صلب در سه بعد ۱۷۴
۶-۴- معادلات حرکت اویلر ۱۷۵
۶-۵- اصل ضربه و اندازهٔ حرکت برای اجسام صلب در سه بعد..... ۱۷۶
۶-۷- انرژی جنبشی جسم صلب در حرکت سه بعدی..... ۱۷۷

بخش دوم: ارتعاشات

فصل اول: حرکت نوسانی

۱-۱ ارتعاشات مکانیکی ۱۹۳
۱-۲ اجزای سیستم ارتعاشی..... ۱۹۳
۱-۳ درجه‌ی آزادی ۱۹۸
۱-۴ حرکت هارمونیک ۲۰۰

فصل دوم:ارتعاشات آزاد سیستم‌های با یک درجه‌ی آزادی

۲-۱ معادلات حرکت فرکانس طبیعی ۲۰۷
۲-۲ روش‌های استخراج معادلات حرکت و فرکانس طبیعی ۲۰۸
۲-۳ بررسی پایدار سیستم‌های ارتعاشی..... ۲۱۹
۲-۴ ارتعاشات آزاد با میرایی لزج..... ۲۲۰

عنوان **صفحه**

۲-۵ کاهش لگاریتمی ۲۲۳
۲-۶ یافتن ضریب استهلاک لزج معادل ۲۲۵
۲-۷ میرایی کولمب ۲۲۹
۲-۸ میرایی ساختاری نویا هیترزیس ۲۳۱
۲-۹ انرژی اتلاف شده براثر میرایی ۲۳۲

فصل سوم:ارتعاشات اجباری هارمونیک

۳-۲ حل معادله ارتعاشی سیستم یک درجه‌ی آزادی با ارتعاشات اجباری ۲۶۱
۳-۳ بررسی تغییرات دامنه‌ی ارتعاشات (X) نسبت به فرکانس نیروی تحریک (ω) ۲۶۴
۳-۴ بررسی تغییرات زاویه‌ی فاز $(\varnothing)$ - فرکانس نیروی تحریک (ω) ۲۶۵
۳-۵- نامیزانی دوار ۲۶۶
۳-۶ لنگی محورهای دوار ۲۶۹
۳-۷ حرکت تکیه‌گاه ۲۷۰
۳-۸ جداسازی ارتعاشات ۲۷۶
۳-۹ قله تشدید (فاکتور $\varnothing$) ۲۷۹
۳-۱۰ میزبان (تپش) ۲۷۹
۳-۱۱ ارتعاشات گذرا ۲۸۰
۳-۱۲ ارتعاشات تحریک ۲۸۳

فصل چهارم: سیستم های ارتعاشی با دو یا چند درجهٔ آزادی

۴-۱ ارتعاشات آزاد سیستم های دو یا چند درجهٔ آزادی ۲۹۹
۴-۲ تعیین فرکانسها و مودهای طبیعی سیستمهای چند درجه آزادی ۳۰۳
۴-۳ کوپلینگ مختصات و مختصات اصلی ۳۰۶
۴-۴ سیستمهای نیمه محدود ۳۰۹
۴-۵ ارتعاشات اجباری چند درجهٔ آزادی ۳۱۲
۵-۶ جاذب ارتعاشات ۳۱۳

فصل پنجم: ارتعاشات سیستم‌های پیوسته

۵-۱ مقدمه ۳۳۵
۵-۲ ارتعاشات طولی میله‌ها ۳۳۵
۵-۳- ارتعاشات عرضی تیرها ۳۳۷
۵-۴- مدهای طبیعی تیر یکنواخت ۳۳۸
۵-۵- ارتعاشات پیچشی محورهای مدور ۳۴۱
۵-۶- محاسبهٔ سختی و جرم معادل تیرها ۳۴۲

بخش اول

دینامیک

فصل اول

سینماتیک ذرات مادی

عناوین اصلی

- ۱-۱- مقدمه
- ۱-۲- حرکت مستقیم الخط
- ۱-۳- تعیین حرکت یک ذره
- ۱-۴- حرکت چندین ذره
- ۱-۵- حرکت در صفحه (حرکت دوبعدی)

فصل اول

سینماتیک ذرات مادی

۱-۱- مقدمه

به طورکلی علم مکانیک را می توان به دو شاخهٔ استاتیک و دینامیک تقسیم کرد. در استاتیک به تحلیل اجسام ساکن و در دینامیک به مطالعه و تحلیل اجسام متحرک پرداخته می شود. دینامیک نیز خود به دو شاخه تقسیم می شود:

۱) سینماتیک (حرکت شناسی): علمی که به مطالعه هندسه حرکت می پردازد و برای بررسی رابطهٔ جابجایی، سرعت، شتاب و زمان، به عامل حرکت (نیروها و گشتاورهای محرک) توجه نمی‌شود.

۲) سینتیک (جنبش شناسی): علمی که به مطالعه روابط موجود بین نیروهای وارد بر جسم، جرم جسم و حرکت جسم می پردازد. از سینتیک برای پیش بینی حرکت ناشی از نیروهای مشخص یا تعیین نیروهای لازم برای حرکتی مشخص استفاده می شود.

در این فصل به مطالعه سینماتیک ذرات می پردازیم. استفاده از کلمهٔ ذرات به این معنا نیست که در این فصل به بررسی اجسام بسیار کوچک پرداخته می شود، بلکه منظور بررسی اجسامی مانند هواپیما، اتومبیل و... است که از نظر ظاهری دارای اندازه های بزرگ هستند. منظور از مطالعه ذرات این است که تنها حرکت انتقالی آنها را در نظر می گیریم و از دوران آنها حول مرکز جرمشان صرفنظر می کنیم. در صورتیکه نتوان از چنین دورانی صرفنظر کرد نمی توان اجسام را ذره در نظر گرفت.

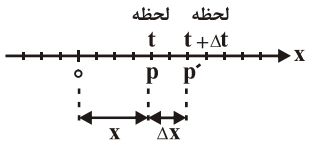
به طور کلی می‌توان علم دینامیک را به صورت زیر دسته‌بندی کرد:

- دینامیک
  - مطالعه ذرات
    - سینماتیک ذره
    - سینتیک ذره
  - مطالعه اجسام صلب
    - سینماتیک جسم صلب
    - سینتیک جسم صلب

در مطالعه هندسه حرکت از دو یا چند مختصه مستقل استفاده می شود. این مختصه ها در دستگاه مختصات مختلفی از قبیل دستگاه مختصات دکارتی (x,y,z)، قطبی (r,θ)، استوانه ای (r,θ,z) و یا کروی (ρ,θ,ϕ) بررسی می شود. به طورکلی اگر حرکت نسبت به یک چارچوب ثابت بیان شود، حرکت را مطلق و اگر دستگاه مختصات مورد بررسی خود دارای حرکت باشد، حرکت را نسبی گویند.

۱-۲- حرکت مستقیم الخط

وقتی ذره ای در امتداد خط مستقیم حرکت می کند، حرکت ذره را مستقیم الخط می نامند. در چنین شرایطی در هر لحظه مفروض t ذره مکانی معین را روی خط مستقیم داراست. برای تعیین مکان ذره نقطه ثابتی مانند مبدأ را روی خط مستقیم و جهتی را به عنوان جهت مثبت در نظر می گیریم. به عبارت دیگر حرکت مستقیم الخط ذرات یک حرکت یک بعدی است. فرض کنید ذره ای در لحظه t در مکان p و در لحظهٔ دیگری مانند $t+\Delta t$ در مکان p' قرار دارد.



سرعت میانگین ذره در فاصلهٔ زمانی Δt از تقسیم جابجایی Δx به Δt تعیین می شود.

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad (۱)$$

از آنجایی که Δx برحسب متر و Δt برحسب ثانیه بیان می شود، سرعت میانگین برحسب متر بر ثانیه $(\frac{m}{s})$ بیان می گردد. سرعت لحظه ای ذره v در لحظهٔ t برابر است با:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \to v = \frac{dx}{dt} \qquad (۲)$$

بنابراین سرعت لحظه ای برابر است با مشتق x نسبت به زمان که برحسب $\frac{m}{s}$ بیان می شود.

فرض کنید ذره در لحظهٔ t دارای سرعت v و در لحظهٔ $t+\Delta t$ دارای سرعت $V+\Delta V$ باشد. در چنین شرایطی شتاب میانگین ذره در فاصلهٔ زمانی Δt به صورت خارج قسمت Δv و Δt تعریف می شود:

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad (۳)$$

شتاب میانگین برحسب $\frac{m}{s^2}$ بیان می شود. شتاب لحظه ای هر ذره در لحظهٔ t به صورت زیر تعریف می شود:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \to a = \frac{dv}{dt} \qquad (۴)$$

بنابراین شتاب برابر با مشتق سرعت نسبت به زمان است و آهنگ تغییرات سرعت را نشان می دهد. شتاب لحظه ای را می توان به صورت مشتق دوم مکان نسبت به زمان بیان کرد.

$$a = \frac{d^2x}{dt^2}$$

📖 **نکته:** سرعت v با عددی جبری که ممکن است مثبت یا منفی باشد، بیان می گردد. مقدار مثبت v نشان می دهد که x افزایش می یابد و مقدار منفی v نشان می دهد که x کاهش می یابد.

📖 **نکته:** اندازه سرعت v را تندی می گویند.

📖 **نکته**: شتاب a با عددی جبری که ممکن است مثبت یا منفی باشد، بیان می گردد. مقدار مثبت a نشان می دهد که سرعت افزایش می یابد. یعنی ذره در جهت مثبت در حرکت تندشونده یا در جهت منفی در حرکت کندشونده است. مقدار منفی نشان می دهد که سرعت روبه کاهش است، یعنی ذره در جهت مثبت در حرکت کندشونده یا در جهت مثبت در حرکت تندشونده است.

📖 **نکته:** یرای تعیین تندشونده و یا کندشونده بودن حرکت از علامتهای سرعت و شتاب استفاده می کنیم:

اگر $v.a > 0$ حرکت تندشونده است.
اگر $v.a < 0$ حرکت کندشونده است.

📖 **نکته:** یک رابطهٔ مهم: با حذف دیفرانسیل dt از روابط $v = \frac{dx}{dt}$ و $a = \frac{dv}{dt}$ به رابطه مهمی برای بیان شتاب می رسیم:

$$\left.\begin{array}{l} v = \frac{dx}{dt} \to dt = \frac{dx}{v} \\ a = \frac{dv}{dt} \to dt = \frac{dv}{a} \end{array}\right\} \to \frac{dx}{v} = \frac{dv}{a} \to a = v\frac{dv}{dx} \qquad (۶)$$

تست ۱-۱

ذره ای را که روی خط مستقیمی در حرکت است در نظر بگیرید. اگر معادلهٔ مکان این ذره برابر با $x(t) = ۶t^۲ - t^۳$ باشد، شتاب ذره در لحظهٔ $t = ۲sec$ چقدر است؟

۱) ۱۲ ۲) ۶ ۳) صفر ۴) ۲

حل:

گزینه «۳»

شتاب از مشتق دوم مکان نسبت به زمان به دست می آید.

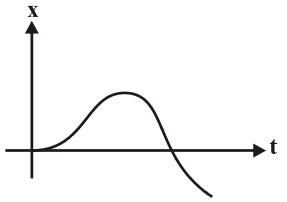
$$\left.\begin{array}{l} a = \frac{d^۲x}{dt^۲} \\ x = ۶t^۲ - t^۳ \end{array}\right\} \to a = ۱۲ - ۶t \to a(۲) = ۱۲ - ۶\times ۲ = ۰\frac{m}{s^۲}$$

بنابراین شتاب ذره در ثانیه ۲ برابر با صفر است.

گاهی برای مطالعه حرکت ذرات به بررسی منحنیهای تغییر مکان، سرعت یا شتاب نسبت به زمان یا مکان پرداخته می شود.

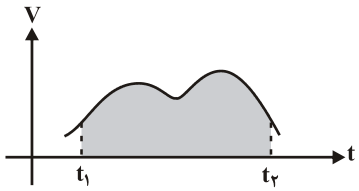
۱- منحنی مکان- زمان $(x-t)$

در منحنی مکان زمان شیب منحنی برابر سرعت لحظه ای و تقعر منحنی بیانگر علامت شتاب است. تقعر رو به بالا بیانگر شتاب مثبت و تقعر رو به پایین بیانگر شتاب منفی است.



۲- منحنی سرعت- زمان $(v-t)$

در منحنی سرعت- زمان مساحت زیر منحنی برابر با تغییر مکان است.

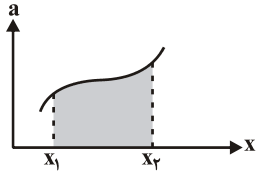


$$\Delta x = \int_{t_1}^{t_2} v\,dt \qquad (۶)$$

شیب منحنی سرعت- زمان برابر با شتاب است.

۳- منحنی شتاب- مکان $(a-x)$:

مساحت زیر منحنی شتاب- مکان برابر با $\frac{۱}{۲}(v_۲^۲ - v_۱^۲)$ است.



$$\frac{۱}{۲}(v_۲^۲ - v_۱^۲) = \int_{t_1}^{t_2} a\,dx \qquad (۷)$$

حرکت مستقیم الخط:
- بدون شتاب (سرعت ثابت یا حرکت یکنواخت) ثابت =V یا $a = ۰$
- سینماتیک ذره ثابت $= a$
- سینتیک ذره $a = a(t)$

نکته: در حرکت مستقیم الخط یکنواخت سرعت ثابت (شتاب صفر $a = ۰$) است.

$$\frac{dx}{dt} = v \text{ ثابت} \rightarrow dx = v\,dt \rightarrow x = x_۰ + vt$$

نکته: در حرکت مستقیم الخط با شتاب یکنواخت، شتاب ثابت است. در چنین حرکتی روابط زیر برقرار است:

$$\frac{dv}{dt} = a = \text{ ثابت} \qquad (۸)$$

$$v = at + v_۰ \text{ (سرعت- زمان)} \qquad (۹)$$

$$x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t + x_۰ \text{ (مکان- زمان)} \qquad (۱۰)$$

$$v^۲ - v_۰^۲ = ۲a(x - x_۰) \text{ (سرعت- مکان)} \qquad (۱۱)$$

۳-۱- تعیین حرکت یک ذره

هرگاه مکان به ازای هر مقدار t معلوم باشد، حرکت ذره معلوم است. در حالت کلی شتاب ذره را می توان برحسب تابعی از یک یا چند پارامتر مانند x و v و t بیان کرد که می توان در قالب سه حالت بررسی کرد.

الف) شتاب تابعی از زمان است. $a = f(t)$: در چنین شرایطی با استفاده از رابطهٔ $a = \frac{dv}{dt}$ داریم:

$$dv = adt \xrightarrow{a=f(t)} dv = f(t)\,dt \qquad (۱۲)$$

با انتگرال گیری از طرفین رابطهٔ فوق خواهیم داشت:

$$\int dv = \int f(t)\,dt \qquad (۱۳)$$

با محاسبهٔ انتگرال اخیر، سرعت برحسب زمان بیان می گردد. اما لازم به یادآوری است که با انتگرال گیری یک ثابت دلخواه وارد می شود. برای تعریف حرکت هر ذره به صورت یکتا، باید شرایط اولیهٔ حرکت ذره یعنی اندازهٔ سرعت اولیه $(v_\circ)$ و مقدار فاصلهٔ ذره در لحظهٔ آغاز $(x_\circ)$ مشخص کنیم:

$$\int_{v_\circ}^{v} dv = \int_\circ^t f(t)\,dt \to v(t) - v_\circ = \int_\circ^t f(t)\,dt \to v(t) = v_\circ + \int_\circ^t v_\circ t\, f(t)\,dt \qquad (۱۴)$$

برای بیان مکان ذره نسبت به زمان:

$$dx = v(t)\,dt \to \int_{x_\circ}^{x} dx = \int_\circ^t v(t)\,dt \to x = x_\circ + \int_\circ^t v(t)\,dt \qquad (۱۵)$$

تست ۱-۲

شتاب ذره ای طبق رابطهٔ $a = a_\circ \cos t$ بیان می شود. اگر در لحظهٔ آغاز حرکت از حالت سکون در شروع به حرکت کند. ذره نسبت به زمان کدام است؟

۱) $a_\circ \sin t$ ۲) $a_\circ - a_\circ \cos t$ ۳) $a_\circ - a_\circ \sin t$ ۴) $a_\circ \cos t$

حل:

$$\begin{cases} dv = adt \\ a = a_\circ \cos t \end{cases} \Rightarrow dv = a_\circ \cos t\,dt \Rightarrow \int_\circ^v dv = \int_\circ^t a_\circ \cos t dt \Rightarrow\ v = a_\circ \sin t$$

$$\left.\begin{array}{l} v = a_\circ \sin t \\ \dfrac{dx}{dt} = v \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = a_\circ \sin t \Rightarrow \int_\circ^x dx = \int_\circ^t a_\circ \sin t\,dt$$

$$x = a_\circ - a_\circ \cos t$$

یعنی گزینه ۲ صحیح است.

ب) شتاب تابعی از مکان یا جابجایی است $a = f(x)$:

$$\begin{cases} a = v\dfrac{dv}{dx} \\ a = f(x) \end{cases} \Rightarrow f(x) = v\frac{dv}{dx} \Rightarrow v\,dv = f(x)\,dx \Rightarrow \int_{v_\circ}^{v} v\,dv = \int_{x_\circ}^{x} f(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}(v^۲ - v_\circ^۲) = \int_\circ^x f(x)\,dx \Rightarrow v^۲ = v_\circ^۲ + ۲\int_{x_\circ}^{x} f(x)\,dx \qquad (۱۶)$$

به عبارت دیگر می توان سرعت را به صورت تابعی از x بیان کرد: $v = v(x)$

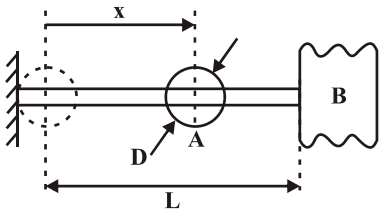
از طرفی:

$$\begin{cases} v=\dfrac{dx}{dt} \\ v=v(x) \end{cases} \Rightarrow v(x)=\frac{dx}{dt} \Rightarrow dt=\frac{dx}{v(x)} \Rightarrow \int_{\circ}^{t} dt=\int_{x_\circ}^{x} \frac{dx}{v(x)}$$

$$\Rightarrow t=\int_{x_\circ}^{x} \frac{dx}{v(x)} \qquad (۱۷)$$

تست ۱-۳

گلوله آهنی A با شتاب $a=\dfrac{k}{(L-x)^۲}$ از $x=۰$ سوی آهنربای B کشیده می شود. تندی رسیدن به آهنربا کدام است؟ (قطر گلوله D است)



۱) $V=\sqrt{\dfrac{KL}{D}}$

۲) $V=\sqrt{\dfrac{K(L-D)}{LD}}$

۳) $V=۲\dfrac{\sqrt{K(L-\frac{D}{۲})}}{LD}$

۴) $V=۲\dfrac{\sqrt{KLD}}{(L-\frac{D}{۲})}$

حل:

گزینه «۳»

$$\frac{۱}{۲}v^۲\Big|_{v_\circ}^{v}=\frac{k}{L-X}\Big|_{\circ}^{X}=\frac{K}{L}-\frac{K}{L-X}=\left(\frac{X-X-L}{L(L-x)}\right)=\left(\frac{-X}{L(L-x)}\right)=$$

$$v^۲=\frac{۲kx}{L(L-x)} \xrightarrow{x=L-\frac{D}{۲}} v=۲\sqrt{\frac{k(L-\frac{D}{۲})}{LD}}$$

ج) شتاب تابعی از سرعت است $a=f(v)$:

$$\left.\begin{matrix} a=\dfrac{dv}{dt} \\ a=f(v) \end{matrix}\right\} \Rightarrow f(v) \Rightarrow dt=\frac{dv}{f(v)} \Rightarrow \int_{\circ}^{t} dt=\int_{v_\circ}^{v} \frac{dv}{f(v)} \Rightarrow$$

$$t=\int_{v_\circ}^{v} \frac{dv}{f(v)} \qquad (۱۸)$$

بنابراین سرعت به صورت تابعی از زمان بیان می شود: $v=v(t)$

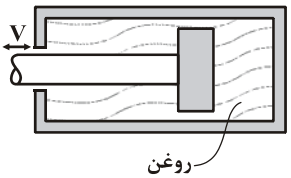
از طرفی:

$$\begin{cases} v=\dfrac{dx}{dt} \\ v=v(t) \end{cases} \Rightarrow \frac{dx}{dt}=v(t) \Rightarrow dx=v(t)\,dt \Rightarrow \int_{x_\circ}^{x} dx=\int_{\circ}^{t} v(t)\,dt$$

$$\Rightarrow x=x_\circ+\int_{t_\circ}^{t} v(t)\,dt \qquad (۱۹)$$

تست ۱-٤

مکانیزم ترمز برای کاهش شدت لگدزدن بعضی از انواع تفنگها، اساساً از پیستونی تشکیل می شود که به لوله ای متصل است و می تواند در سیلندر پر از روغن حرکت کند. وقتی لوله با سرعت اولیهٔ $v_\circ$ عقب نشینی کند، پیستون حرکت کرده، روغن از داخل سوراخهای آن خارج می شود و باعث می شود تا شتاب پیستون و لوله با آهنگ متناسب با سرعت آن کاهش پیدا کند یعنی $a=-kv$، رابطه x برحسب t کدام است؟



۱) $x=(\frac{v_\circ}{k})^2 e^{-kt}$

۲) $x=\frac{v_\circ}{k}(1-e^{-kt})$

۳) $x=(\frac{v_\circ}{k})^2(1+e^{-kt})$

۴) $x=\frac{v_\circ}{k}e^{-kt}$

حل:

$$\begin{cases} a=\frac{dv}{dt} \\ a=-kv \end{cases} \Rightarrow \frac{dv}{dt}=-kv \Rightarrow -kdt=\frac{dv}{v} \Rightarrow \int_\circ^t -kdt=\int_{v_\circ}^{v}\frac{dv}{v} \Rightarrow$$

$$-kt=\ell n v\Big|_{v_\circ}^{v} \Rightarrow -kt=\ell n(\frac{v}{v_\circ}) \Rightarrow \frac{v}{v_\circ}=e^{-kt} \Rightarrow v=v_\circ e^{-kt}$$

از طرفی:

$$\begin{cases} v=\frac{dx}{dt} \\ v=v_\circ e^{-kt} \end{cases} \Rightarrow \frac{dx}{dt}=v_\circ e^{-kt} \Rightarrow dx=v_\circ e^{-kt}dt \Rightarrow$$

$$\int_\circ^x dx=\int_\circ^t v_\circ e^{-kt}dt \Rightarrow x=v_\circ\int_\circ^t e^{-kt}dt=-\frac{v_\circ}{k}e^{-kt}\Big|_\circ^t \Rightarrow$$

$$x=-\frac{v_\circ}{k}\left[e^{-kt}-1\right]=\frac{v_\circ}{k}\left[1-e^{-kt}\right] \Rightarrow x=\frac{v_\circ}{k}\left[1-e^{-kt}\right]$$

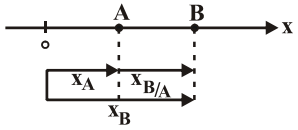
بنابراین گزینه ۲ صحیح است.

۱-۴- حرکت چندین ذره

وقتی چند ذرهٔ مستقل از هم در امتداد یک خط مستقیم حرکت کنند، معادلات حرکت را می توان برای هر ذره به طور جداگانه نوشت.

۱-۴-۱- حرکت نسبی دو ذره

دو ذره A و B را که در امتداد یک خط راست حرکت می کنند در نظر بگیرید. اگر مختصات x_A و x_B را از یک مبدأ اندازه گیری کنیم، اختلاف x_B-x_A مشخص کنندهٔ مختصات نسبی مکان B نسبت به A است و آن را با $x_{B/A}$ نشان می دهیم:



$$x_{B/A} = x_B - x_A \Rightarrow x_B = x_A + x_{B/A} \qquad (۲۰)$$

آهنگ تغییرات $x_{B/A}$ را سرعت نسبی B نسبت به A می نامند و آن را با $v_{B/A}$ نشان می دهند.

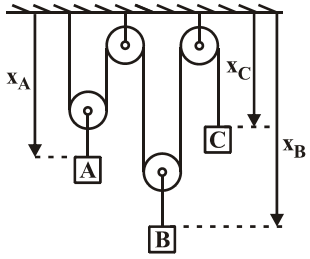
$$v_{B/A} = v_B - v_A \Rightarrow v_B = v_A + v_{B/A} \qquad (۲۱)$$

آهنگ تغییرات $v_{B/A}$ را شتاب نسبیB نسبت بهA می نامند و آن را با $a_{B/A}$ نشان می دهند.

$$a_{B/A} = a_B - a_A \Rightarrow a_B = a_A + a_{B/A} \qquad (۲۲)$$

۱-۴-۲- حرکات وابسته

گاهی مکان یک ذره به ذره های دیگر بستگی دارد، حرکات این ذره ها را وابسته می گویند. در حرکات وابسته با استفاده از هندسه حرکت ذرات، دسته ای روابط کمکی برای توصیف حرکت بیان می شود. به عنوان مثال سه جرم A، B و C توسط طنابی که از روی قرقره ها می گذرد، به یکدیگر متصل شده اند.



طول طنابی که از روی قرقره ها می گذرد ثابت است.

$$۲x_A + ۲x_B + x_C = \text{ثابت} \qquad (۲۳)$$

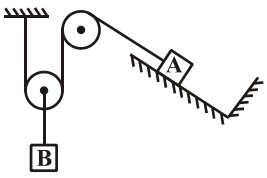
از آنجا که دو تا از مختصات را می توان به دلخواه این سیستم دو درجهٔ آزادی است. رابطهٔ اخیر رابطهٔ کمکی است.وقتی رابطهٔ موجود بین مختصات مکانی چندین ذره خطی باشد، با مشتق گیری از رابطهٔ کمکی نسبت به زمان می توان به روابط مشابهی برای سرعتها و شتابهای ذرات رسید:

$$۲\frac{dx_A}{dt} + ۲\frac{dx_B}{dt} + \frac{dx_C}{dt} = ۰ \Rightarrow ۲v_A + ۲v_B + ۲v_C = ۰ \qquad (۲۴)$$

$$۲\frac{dv_A}{dt} + ۲\frac{dv_B}{dt} + \frac{dv_C}{dt} = ۰ \Rightarrow ۲a_A + ۲a_B + a_C = ۰ \qquad (۲۵)$$

تست ۱-۵

اگر شتاب بالاآمدن جرم A برابر با $v_A = ۰/۰۴\frac{m}{s^۲}$ باشد، شتاب جرم چقدر است؟



۱) $۰/۰۴۴\frac{m}{s^۲}$ ۲) $۰/۰۲۲\frac{m}{s^۲}$

۳) $۰/۰۸۸\frac{m}{s^۲}$ ۴) $۰/۰۱۱\frac{m}{s^۲}$

حل:

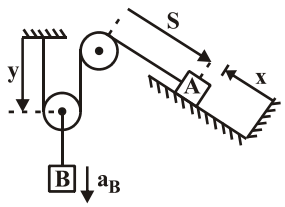
ابتدا براساس ثابت بودن طول طناب (L) به استخراج رابطهٔ کمکی می پردازیم:

$\rightarrow$ رابطهٔ کمکی: $L = ۲y + s +$ ثابت $\rightarrow$

$\rightarrow ۲y + s =$ ثابت $\rightarrow ۲\ddot{y} + \ddot{s} = ۰ \rightarrow$

$\rightarrow \ddot{y} = -\frac{\ddot{s}}{۲} \Rightarrow a_B = -\frac{a_A}{۲}$

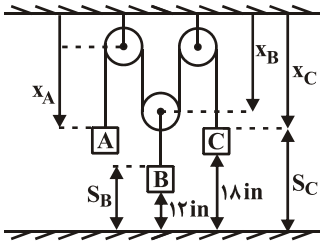
$\rightarrow a_B = -\frac{۰/۰۴۴}{۲} = -۰/۰۲۲ \frac{m}{s^۲}$



یعنی گزینه ۲ صحیح است.

تست ۱-۶

با دانستن اینکه بلوکهای B و C یک ثانیه بعد از حرکت از حالت ساکن پشت سرهم به زمین می خورند. شتاب A را به دست آورید. (مهندسی مکانیک- سراسری۷۱)



۱) $۷ \frac{ft}{s^۲}$ ۲) $۳/۵ \frac{ft}{s^۲}$

۳) $۱۰/۵ \frac{ft}{s^۲}$ ۴) $۱۳/۵ \frac{ft}{s^۲}$

حل:

معادله کمکی از ثابت بودن طول طناب A و C حاصل می شود. اگر طول طناب L فرض شود:

$$L = x_A + ۲۵x_B + x_C + \cos\tan t = \cos\tan t$$

با مشتق گیری از رابطهٔ فوق نسبت به زمان به روابط زیر خواهیم رسید:

مشتق اول: $\dot{x}_A + ۲\dot{x}_B + \dot{x}_C = ۰$

مشتق دوم: $\ddot{x}_A + ۲\ddot{x}_B + \ddot{x}_C = ۰$

فاصلهٔ جسم B تا زمین ۱۲ in (۱ ft) است و به دلیل شتاب گرانش جرم B با شتاب ثابت $\ddot{x}_B$ و سرعت اولیه صفر این فاصله را در ۱ ثانیه طی می کند. یعنی:

$$s_B = \frac{۱}{۲}a_B t^۲ + v_۰ t \Rightarrow ۱ = \frac{۱}{۲}\ddot{x}_B (۱)^۲ \Rightarrow \ddot{x}_B = ۲ \frac{ft}{s^۲}$$

به طور مشابه برای جرم C:

$$s_C = \frac{۱}{۲}a_C t^۲ + v_۰ t \Rightarrow ۱/۵ = \frac{۱}{۲}\ddot{x}_C (۱)^۲ \Rightarrow \ddot{x}_C = ۳ \frac{ft}{s^۲}$$

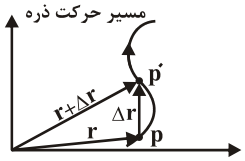
با استفاده از سه رابطهٔ اخیر:

$$\ddot{x}_A = -۲\ddot{x}_B - \ddot{x}_C = -۲ \times ۲ - ۳ = -۷ \frac{ft}{s^۲}$$

یعنی گزینه ۱ صحیح است.

۱-۵- حرکت در صفحه (حرکت دوبعدی)

هرگاه حرکت ذره بر روی مسیری دلخواه بر روی یک صفحه انجام شود، حرکت را صفحه ای می گویند. حرکت صفحه ای نوعی حرکت دوبعدی است که در سه نوع دستگاه مختصات کارتزین $(x-y)$، عمودی- مماسی و قطبی $(r-\theta)$ قابل بررسی است. فرض کنید ذره ای روی مسیری مشخص در حرکت است.



سرعت ذره به صورت زیر قابل بیان است:

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{dr}{dt} = \dot{r} \qquad (۲۶)$$

اندازه بردار سرعت را تندی می گویند و با $V = |v|$ بیان می شود:

$$V = |v| = \left|\frac{dr}{dt}\right| \qquad (۲۷)$$

بردار سرعت همواره بر مسیر حرکت ذره مماس است. شتاب ذره به صورت زیر قابل بیان است.

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \qquad (۲۸)$$

حال به بررسی روابط فوق در دستگاههای مختصات مختلف می پردازیم:

۱-۵-۱- دستگاه مختصات کارتزین:

در دستگاه مختصات کارتزین بردار مکان توسط مختصه های x و y بیان می شود:

- بردار مکان:

$$r = x\hat{i} + y\hat{j} \qquad (۲۹)$$

- بردار سرعت:

$$v = \dot{r} = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} v_x = \dot{x} \\ v_y = \dot{y} \end{cases} \qquad (۳۰)$$

- تندی:

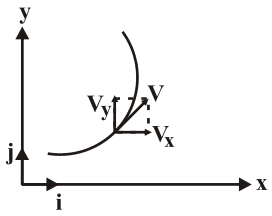
$$|v| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \qquad (۳۱)$$

- بردار شتاب:

$$a = \ddot{r} = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} = \dot{v}_x + \dot{v}_y\hat{j} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} a_x = \ddot{x} = \dot{v}_x \\ a_y = \ddot{y} = \dot{v}_y \end{cases} \qquad (۳۲)$$

- اندازه شتاب:

$$|a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \qquad (۳۳)$$



معمولاًبررسی حرکت پرتابه در یک صفحه تحت گرانش ثابت در دستگاه مختصات کارتزین انجام می شود.

۱-۵-۲- دستگاه مختصات مماسی- عمودی $(n-t)$

در بررسی حرکت ذره در دستگاه مختصات مماسی- عمودی از بردارهای یکه $\hat{e}_t$ و $\hat{e}_n$ استفاده می شود. بردار یکه $\hat{e}_t$ بر مسیر حرکت ذره مماس است و $\hat{e}_n$ بر $\hat{e}_t$ عمود است. در چنین دستگاه مختصاتی، با توجه به اینکه بردار سرعت بر مسیر مماس است، بردار سرعت به صورت زیر بیان می شود:

$$\vec{v} = v\hat{e}_t \qquad (۳۴)$$

از طرفی می توان ثابت کرد که:

$$\frac{d\hat{e}_t}{dt} = \frac{v^2}{\rho}\hat{e}_n \qquad (۳۵)$$

به طوریکه v تندی ذره و ρ شعاع انتحنای مسیر است.
با به کاربردن قاعدهٔ دیفرانسیل گیری نسبت به زمان:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\hat{e}_t) = \frac{dv}{dt}\hat{e}_t + v\frac{d\hat{e}_t}{dt} \qquad (۳۶)$$

با استفا ه از دو رابطهٔ اخیر:

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\hat{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\hat{e}_n \qquad (۳۷)$$

مؤلفه های اسکالر شتاب عبارتند از:

$$\begin{cases} a_t = \dfrac{dv}{dt} \\ a_n = \dfrac{v^2}{\rho} \end{cases} \qquad (۳۸)$$

