

دانش اگر در ثریا هم باشد مردمانی از سرزمین پارس بر آن دست خواهند یافت.

پیامبر اعظم (ص)

شرح جامع

دروس تخصصی هوش مصنوعی

(مدارهای الکتریکی، طراحی الگوریتم، هوش مصنوعی)

«مهندسی کامپیوتر»

(هوش مصنوعی)

آزمون‌های سراسری و آزاد

مولف: امیر آسیایی طاهری

انتشارات ارشد

پیشگفتار ناشر

خداوند بزرگ را شاکریم که فرصتی عنایت فرمود تا بتوانیم قدمی در جهت گسترش علم و فرهنگ کشور عزیزمان برداریم و مسیری هموار را در اختیار مخاطبان و داوطلبان علاقمند به ادامه تحصیل قرار دهیم. از آنجائی که درحوزه کتاب‌های درسی و کمک درسی کارشناسی ارشد کتاب‌های زیادی به رشته تحریر در آمده است با این حال وجود یک مجموعه جامع، دقیق، کامل و دارای رفرنس(منابع) مستند احساس می‌شود.

همیشه دغدغه داشتیم که ای کاش می‌شد تمامی منابع پراکنده و گاهاً دست نایافتنی کنکور در یک مجموعه به گونه‌ای جذاب و شیوا آماده می‌شد و همچنین سوالات دوره‌های قبل کنکور نیز به گونه‌ای تشریحی پاسخ داده می شدند، که خدشه‌ای بر آنها وارد نشود و خیال داوطلبان عزیز آنقدر آسوده باشد که اطلاعات مندرج در پاسخنامه‌ها را برای بهره‌گیری در آزمون خود بکار گیرند. این کار با یاری خداوند بزرگ و همکاری نخبه‌ترین دانشجویان و اساتید کشور در انتشارات ارشد هماهنگ گردید و در تمامی مقاطع تحصیلی از کاردانی به کارشناسی، کارشناسی ارشد و دکتری در حوزهٔ آزمون‌های سراسری – آزاد و پیام نور بسته‌های آموزشی شامل کتاب‌های بانک سوالات و کتاب‌های شرح جامع درس آماده گردید. در تهیه مجموعه‌های فوق‌الذکر از فارغ‌التحصیلان کارشناسی ارشد و دکتری که حائز رتبه‌های تک رقمی کنکور می‌باشند، استفاده کرده‌ایم، تا شما عزیزان بتوانید در راستای افزایش توان علمی خود در جهت نیل به مقصود خویش نایل آیید. بدون تردید می‌توان گفت که برای اولین بار در نظام آموزشی کشور مجموعه‌ای به این سبک عرضه می‌شود که در کیفیت و کمیت بی‌نظیر بوده و تمامی نیازهای دانشجویان و داوطلبان عزیز را پوشش می‌دهد. امید است که استفاده از این مجموعه عزیزان را در جهت موفقیت در آزمون یاری رسانده باشد. در پایان لازم به ذکر است که بی نقصی محض از آن خداوند متعال می‌باشد، بنا براین از تمامی خوانندگان و داوطلبان عزیز خواهشمندیم نظرات سازنده خود را در مورد این کتاب به سایت انتشارات ارشد اعلام نمایند تا ما را در جهت هر چه بهتر آماده کردن این محصولات یاری رسانند.

با تشکر

ناشـــــر

www.arshadbook. ir

پیشگفتار مؤلف

در سال‌های اخیر رشتهٔ در حال گسترش " هوش مصنوعی" علاقه‌مندان زیادی را از رشته‌های مهندسی برق و کامپیوتر، علوم کامپیوتر و دیگر رشته‌ها به خود جذب نموده است. این رشته با باز نمودن افق‌های بکر و بدیع مانند رباتیک، عاملهای هوشمند، یادگیری، علوم شناختی و ... در برابر دانشمندان و مهندسین نوید بخش آیندهٔ جذابی برای انسان است. به همین جهت این رشته در کشور ما ایران، روز به روز با اقبال بیشتری مواجه می‌شود که افزایش ظرفیت پذیرش این رشته در سال‌های اخیر تأییدی بر همین امر است.

آزمون کارشناسی ارشد این رشته برای پوشش هوش مصنوعی کلاسیک و الگوریتم‌های مورد نیاز در آن و همچنین رباتیک، سه مبحث "هوش مصنوعی"، "طراحی الگوریتم" و "مدارهای الکتریکی" را مورد پرسش قرار می‌دهد.

این نوشتار خلاصه‌ای است از متون مرجع سه درس فوق الذکر که با توجه به سوالات مطرح شده در آزمون‌های سال‌های گذشته تدوین گشته است. مرجع بخش "هوش مصنوعی" ویرایش دوم کتاب معرفی هوش مصنوعی: رویکردی نوین است که در بسیاری از دانشگاه‌های داخل و خارج از کشور تدریس می‌شود. ۹ بخش اول این کتاب که حاوی مطالب مورد پرسش در آزمون کارشناسی ارشد است، در این نوشتار مورد استفاده قرار گرفته است. مرجع بخش طراحی الگوریتم کتاب مشهور "معرفی الگوریتم‌ها" است که مرجع این درس در دانشگاه‌های معتبر کشور می‌باشد. به تناسب سوالات مطروحه در آزمون‌های گذشته، بخش‌های متفاوتی از این کتاب مورد استفاده قرار گرفته است. در بخش مدارهای الکتریکی از کتاب "نظریهٔ اساسی مدارها و شبکه‌ها" که توسط جناب آقای دکتر پرویز جبه دار مارالانی، استاد ممتاز دانشگاه تهران، ترجمه و تکمیل شده است بهره برده‌ایم. برکسی پوشیده نیست که این کتاب مرجع بلا منازع مدارهای الکتریکی در سطح کشور است.

لازم به ذکر است که هدف اصلی این نوشتار، آماده‌سازی داوطلبان آزمون کارشناسی ارشد هوش مصنوعی برای موفقیت در این آزمون است. لذا هر چند تعاریف و مبانی مورد نیاز به تناسب بیان گردیده است ولی در بیشتر موارد به ارائه روش‌های حل مسأله اکتفا و از توضیح عمیق مطالب پرهیز شده است.

در پایان لازم می‌دانم از دوستان عزیزم، جناب آقای مهندس فولادی و جناب آقای مهندس مهدی مصفا که از کمک ایشان در بخش‌های مختلفی از کتاب پیش رو بهره برده‌ام، کمال تشکر را داشته باشم.

امید است این تلاش ناچیز موجب تسهیل موفقیت داوطلبین در آزمون گردد و زمینهٔ ادامهٔ تحصیل دانشجویان مستعد و علاقه‌مند به این رشته را فراهم آورد.

امیر آسیائی طاهری

بهمن ۸۸

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فصل اول: نمادهای مجانبی

۱-۱- معرفی نمادهای مجانبی ۱۳
۱-۱-۱- نماد Θ ۱۳
۱-۱-۲- نماد: O ۱۳
۱-۱-۳- نماد Ω ۱۴
۱-۱-۴- نماد o ۱۴
۱-۱-۵- نماد ω ۱۵
۱-۲- مقایسه‌ی زمان اجرای الگوریتم‌ها ۱۵
۱-۳- مقایسه رشد توابع مشهور با یکدیگر ۱۶

فصل دوم: طراحی و تحلیل الگوریتم‌ها

۲-۱- طراحی به سبک تقسیم و غلبه ۲۱
۲-۲- طراحی به سبک حریصانه ۲۲
۲-۳- برنامه نویسی پویا ۲۲

فصل سوم: روابط بازگشتی

۳-۱- جایگذاری ۲۷
۳-۱-۱- روش تستی برای حدس زدن جواب رابطه‌ی بازگشتی ۲۸
۳-۲- روش اصلی ۲۹
۳-۳- حل روابط بازگشتی با استفاده از معادلهٔ مشخصه ۳۰

فصل چهارم: روش‌های مرتب‌سازی

۴-۱- مرتب‌سازی درجی ۳۹
۴-۲- مرتب‌سازی حبابی ۴۰
۴-۳- مرتب‌سازی ترکیبی ۴۰
۴-۴- مرتب‌سازی سریع ۴۲
۴-۵- مرتب‌سازی پشته‌ای ۴۴

فصل پنجم: روش‌های جستجو

۵-۱- جستجوی دودوئی ۵۳
۵-۲- درخت جستجوی دودوئی ۵۳

۳-۵- جستجوی سطح اول ۵۶
۴-۵- جستجوی عمق اول ۵۸
۵-۵- طبقه‌بندی انواع یال‌ها ۵۹

فصل ششم: الگوریتم‌های گراف

۱-۶- درخت پوشای کمینه ۶۷
۱-۱-۶- الگوریتم کراسکال ۶۷
۲-۱-۶- الگوریتم پریم ۶۸
۲-۶- کوتاه‌ترین مسیرهای هم مبداء ۷۱
۱-۲-۶- الگوریتم دایسترا ۷۲
۲-۲-۶- کوتاه‌ترین مسیرهای هم مبداء در گراف‌های بدون دور جهت‌دار ۷۳
۳-۲-۶- الگوریتم بلمن – فورد ۷۴

فصل هفتم: دیگر مسائل مورد توجه در کنکور سراسری

۱-۷- کد هافمن ۸۳
۲-۷- ترکیب فایل‌ها با استفاده از روش هافمن ۸۶

فصل هشتم: معرفی هوش مصنوعی

۱-۸- رویکردهای مختلف به هوش مصنوعی: ۹۱

فصل نهم: عامل هوشمند

۱-۹- انواع محیط ۹۵
۱-۱-۹- کاملاً قابل مشاهده در مقابل اندکی قابل مشاهده ۹۶
۲-۱-۹- قطعی در مقابل تصادفی ۹۶
۳-۱-۹- بخشی در مقابل متوالی ۹۶
۴-۱-۹- ایستا در مقابل پویا ۹۶
۵-۱-۹- گسسته در مقابل پیوسته ۹۶
۶-۱-۹- تک عاملی در مقابل چند عاملی ۹۷
۲-۹- ساختار عامل ۹۷
۱-۲-۹- عامل واکنشی ساده ۹۷
۲-۲-۹- عامل واکنشی مبتنی بر مدل ۹۸
۳-۲-۹- عامل مبتنی بر هدف ۹۸
۴-۲-۹- عامل مبتنی بر سود ۹۸
۵-۲-۹- عامل یادگیرنده ۹۸

فصل دهم: حل مسأله با کمک جستجو ناآگاهانه

۱- ۱۰- جستجوی سطح اول یا BFS ۱۰۵
۲- ۱۰- جستجوی هزینه یکنواخت یا UCS ۱۰۶
۳-۱۰- جستجو عمق اول یا DFS ۱۰۷
۴-۱۰- جستجوی عمق محدود شده یا DLS ۱۰۸
۵-۱۰- جستجوی عمیق شوندهٔ تکراری یا IDS ۱۰۸
۶-۱۰- جستجوی دو طرفه یا BS ۱۰۸

فصل یازدهم: جستجوی آگاهانه و کاوش

۱-۱۱- الگوریتم‌های آگاهانه یا شهودی یا اکتشافی ۱۱۵
۱-۱-۱۱- جستجوی بهترین- اول حریصانه ۱۱۵
۲-۱-۱۱- جستجوی A^* ۱۱۵
۲-۱۱- الگوریتم‌های تغییر یافتهٔ A^* ۱۱۷
۱-۲-۱۱- IDA ۱۱۸
۲-۲-۱۱- RBFS ۱۱۸
۳-۲- ۱۱- SMA* ۱۱۹
۳-۱۱- الگوریتم‌های جستجوی محلّی و مسائل بهینه‌سازی ۱۱۹
۱-۳-۱۱- جستجو به روش بالا رفتن از تپه ۱۲۰
۲-۳-۱۱- جستجو به روش تافت شبیه‌سازی شده ۱۲۰
۳-۳-۱۱- جستجوی گروهی محلّی ۱۲۰
۴-۳-۱۱- الگوریتم ژنتیکی ۱۲۰

فصل دوازدهم: مسائل ارضای قیود

۱-۱۲- جستجوی روبه عقب ۱۲۸
۱-۱-۱۲- کمترین مقدار باقی مانده ۱۲۸
۲-۱-۱۲- روش مکاشفه‌ای درجه ۱۲۸
۳-۱-۱۲- کمترین مقدار محدود کننده ۱۲۹

فصل سیزدهم: جستجوی رقابتی

۱-۱۳- درخت بازی ۱۳۵
۱-۲-۱۳- هرس آلفا- بتا ۱۳۶
۳-۱۳- بازی های همراه با شانس ۱۳۹
۱-۳-۱۳- الگوریتم هرس آلفا- بتا روی درخت بازی شانسی ۱۴۰

فصل چهاردهم: عامل منطقی

۱-۱۴- تعاریف منطق و استنتاج ۱۴۷
۲-۱۴- منطق گزاره‌ای ۱۴۸
۱-۲-۱۴- تعاریف منطق گزاره‌ای ۱۴۹
۲-۲-۱۴- استنتاج در منطق گزاره‌ای: ۱۴۹
۱-۲-۲-۱۴- CNF ۱۵۰
۲-۲-۲-۱۴- الگوریتم RESOLUTION برای استنتاج: ۱۵۰

فصل پانزدهم: منطق مرتبه اول

۱-۱۵- سورها ۱۵۸
۱-۱-۱۵- سور عمومی و وجودی ۱۵۸
۲-۱-۱۵- سورهای تودرتو ۱۵۸
۳-۱-۱۵- روابط بین $\exists$ و $\forall$ ۱۵۸
۲-۱۵- استنتاج در منطق مرتبه اول ۱۶۰
۱-۲-۱۵- برداشتن سورها ۱۶۰

۱-۱-۲-۱۵- برداشتن سور عمومی: ۱۶۰
۱-۲-۲-۱۵- برداشتن سور وجودی ۱۶۱
۲-۲-۱۵- Modus – Ponens تعمیم یافته ۱۶۱
۳-۲-۱۵- یکسان سازی ۱۶۲
۳-۱۵- استنتاج با استفاده از زنجیربندی پیشرو و پسرو ۱۶۲
۴-۱۵- الگوریتم Resolution در منطق مرتبه اول ۱۶۳

فصل شانزدهم: حل مدارهای مقاومتی

۱-۱۶- قوانین KCL و KVL ۱۷۵
۱-۱-۱۶- قانون KCL ۱۷۵
۲-۱-۱۶- قانون KVL ۱۷۵
۲-۱۶- مدارهای مقاومتی ۱۷۶
۳-۱۶- اتصال مقاومت‌ها ۱۷۶
۱-۳-۱۶- اتصال سری ۱۷۶
۲-۳-۱۶- اتصال موازی ۱۷۶
۴-۱۶- منابع نابسته ۱۷۷
۱-۴-۱۶- منبع جریان نابسته ۱۷۷
۲-۴-۱۶- منبع ولتاژ نابسته ۱۷۷
۵-۱۶- مدارهای معادل ۱۷۷
۶-۱۶- تقسیم ولتاژ و تقسیم جریان ۱۷۸
۱-۶-۱۶- تقسیم ولتاژ: ۱۷۸
۲-۶-۱۶- تقسیم جریان: ۱۷۸
۷-۱۶- منابع وابسته ۱۷۸
۸-۱۶- حل مدار بوسیلهٔ KVL و KCL ۱۷۹
۱-۸-۱۶- حل مدار بوسیلهٔ KCL ۱۷۹
۲-۸-۱۶- حل مدار بوسیلهٔ KVL ۱۸۰
۹-۱۶- محاسبه مدار معادل از سرهای مدار ۱۸۲
۱۰-۱۶- جمع آثار ۱۸۳

فصل هفدهم: حل مدارها در حوزه فرکانس

۱-۱۷- نمایش مدارها در حوزهٔ فرکانس ۱۹۱
۲-۱۷- مدار تشدید ۱۹۳
۳-۱۷- انتقال توان ماکزیمم ۱۹۴
۴-۱۷- فرکانس‌های طبیعی ۱۹۴
۵-۱۷- جواب حالت دائمی و گذرا ۱۹۶
۶-۱۷- مقادیر موثر یا ریشه‌ی مقدار توان دوّم ۱۹۹
۷-۱۷- نکاتی پیرامون خازن و سلف ۲۰۰
۸-۱۷- سیستم‌های خطی تغییرناپذیر با زمان (LTI) ۲۰۱
فصل هجدهم: تقویت کننده‌های عملیاتی یا آپ امپ ۲۱۱
فصل نوزدهم: سلف‌های تزویج شده و ترانسفورماتورها ۲۱۷

بخش اول

طراحی الگوریتم

فصل اول

نهادهای مجانبی

عناوین اصلی

- معرفی نمادهای مجانبی
- قضایای مقایسهٔ زمان اجرای الگوریتم‌ها
- روش‌های تستی مقایسهٔ نمادهای مجانبی

فصل اول

نمادهای مجانبی

نمادهایی که در این بخش معرفی می‌شوند در مشخص نمودن زمان مورد نیاز برای اجرای الگوریتم‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرند. این نمادها توابعی هستند که بدترین حالت[1] برای زمان اجرای یک الگوریتم را بر حسب تعداد ورودی آن (که عموماً اعداد طبیعی هستند) نشان می‌دهند به عنوان مثال $f(n)$ می‌تواند نشان دهنده‌ی زمان اجرای الگوریتم جستجو بر روی یک آرایه با n عنصر باشد. از آنجایی که محاسبه‌ی دقیق $f(n)$ها برای الگوریتم‌ها کار پیچیده‌ای است از نمادهای مجانبی برای نشان دادن میزان رشد $f(n)$ (یعنی وقتی n زیاد می‌شود $f(n)$ با چه سرعتی افزایش یابد.) استفاده می‌شود. همچنین این نمادها امکان مقایسه‌ی سرعت الگوریتم‌های مختلف با یکدیگر را فراهم می‌آورند.

۱-۱- معرفی نمادهای مجانبی

۱-۱-۱- نماد Θ

تعریف ریاضی: $\Theta(g(n)) = \{f(n) : \forall n \geq n_0 \circ \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$ وجود دارند به قسمتی که: n_0, c_2, c_1 {ثابت‌های مثبت

تعریف شهودی: $\Theta(g(n))$ نشان‌گر کلیه توابعی است که از یک مقدار معین از n به بعد قابل محصور شدن بین ضرایبی از $g(n)$ هستند یعنی رشد $f(n)$ و $g(n)$ تقریباً با یکدیگر برابر است.

مثال: $2n^2 - 3n = \Theta(n^2)$ و $3n - 5 \neq \Theta(n^2)$

تمرین: برای مثال اول ضرایب C_1 و C_2 و n_0 را بدست آورید.

📖 **نکته:** $f(n) = \Theta(g(n))$ نماد درستی برای نشان دادن این که $f(n)$ از رتبه‌ی $g(n)$ است نمی‌باشد بلکه نماد درست $f(n) \in \Theta(g(n))$ است. ولی ما مسامحتاً از $=$ به جای $\in$ استفاده می‌کنیم.

مثال

هر چند جمله‌ای $p(n) = \sum_{i=0}^{d} a_i n^i$ که $a_d > 0$ است داریم $p(n) = \Theta(n^d)$ یعنی هر چند جمله‌ای که ضریب بزرگ‌ترین درجه‌ی آن مثبت باشد از رتبه‌ی بزرگ‌ترین درجه خود است.

۱-۱-۲- نماد: O

تعریف ریاضی: $O(g(n)) = \{f(n) : \forall n \geq n_0 : 0 \leq f(n) \leq cg(n)$ وجود دارند به قسمی که n_0 و c {ثابت‌های مثبت

---

1 -Worst – Case

تعریف شهودی: $O(g(n))$ نشانگر کلیه توابعی است که از یک مقدار معین از n به بعد پایین‌تر از $g(n)$ قرار می‌گیرند. یا به عبارت دیگر $g(n)$ حد بالای آن توابع می‌شود.

مثال: $3n-5=O(n^2), 2n^2-3n=O(n^2)$

تمرین: ضرایب c و n_0 برای مثال بالا را بدست آورید.

نکته: $\Theta(g(n))\subseteq O(g(n))$ یعنی اگر $f(n)=\Theta(g(n))$ باشد قطعاً از $f(n)=O(g(n))$ نیز خواهد بود. این مطلب از روی تعریف کاملاً مشخص است.

۳-۱-۱- نماد Ω

تعریف ریاضی: $\Omega(g(n))=\{f(n):\forall n\geq n_0 : 0\leq cg(n)\leq f(n)\}$ ثابت‌های مثبت c و n_0 وجود دارند به قسمی که

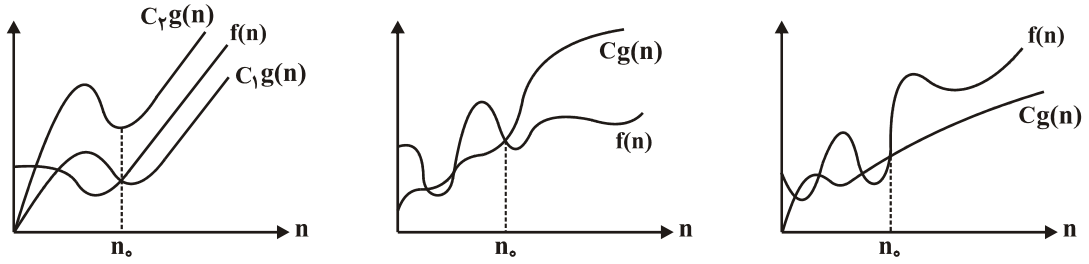
تعریف شهودی: $\Omega(g(n))$ کلیه توابعی هستند که $g(n)$ از یک n به بعد حد پایین آن محسوب می‌شود.

مثال: $2n^2-3n=\Omega(n^2)$ و $3n^2-7n=\Omega(n)$

نکته: $\Theta(g(n))\subseteq \Omega g(n)$ یعنی $f(n)=\Theta(g(n))$ $f(n)=\Omega(g(n))$ را نتیجه می‌دهد و با توجه به تعریف این امر کاملاً روشن است.

قضیه: $f(n)=O(g(n))\wedge f(n)=\Omega(g(n))\Leftrightarrow f(n)=\Theta(g(n))$

شکل‌های زیر به خوبی این سه نماد را توضیح می‌دهند:



$f(n)=\Theta(g(n))$ $f(n)=O(g(n))$ $f(n)=\Omega(g(n))$

۴-۱-۱- نماد o

تعریف ریاضی: $o(g(n))=\{f(n):\forall c>0\exists n_0>0\varepsilon\forall n>n_0\, o\leq f(n)<cg(n)\}$

تعریف شهودی: تفاوت oبا O در این است که تعریف o به ازای تمامی $c>0$ برقرار است ولی O به ازای برخی $c>0$ برقرار می‌باشد.

نکته: طبق تعریف oبرای تشخیص می‌توان از محک زیر استفاده کرد. اگر رابطه‌ی زیر بین $f(n)$و $g(n)$ برقرار بود $f(n)=o(g(n))$ خواهد بود.:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=0$$

یعنی در بینهایت $f(n)$ در مقابل $g(n)$ قابل صرف‌نظر کردن است.

۵-۱-۱- نماد ω

تعریف ریاضی: $\omega(g(n)) = \{f(n) : \forall c > 0 \exists n_0 > 0 : \forall n > n_0 \; 0 \le cg(n) < f(n)\}$

تعریف شهودی: تفاوت ω با Ω نیز همان سور عمومی $\forall c > 0$ است.

📖 **نکته:** طبق تعریف در بی‌نهایت $g(n)$ در مقابل $f(n)$ قابل صرف‌نظر کردن است لذا محک زیر برای تشخیص ω بودن به کار می‌رود:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$$

۲-۱- مقایسه‌ی زمان اجرای الگوریتم‌ها

برای سهولت مقایسه به بیان شباهت بین نمادهای مجانبی و نمادهای عددی می‌پردازیم. اگر a و b را معادل $f(n)$ و $g(n)$ بگیریم داریم:

$$f(n) = O(g(n)) \approx a \le b$$

$$f(n) = \Omega(g(n)) \approx a \ge b$$

$$f(n) = \Theta(g(n)) \approx a = b$$

$$f(n) = o(g(n)) \approx a < b$$

$$f(n) = \omega(g(n)) \approx a > b$$

حال پس از بیان این شباهت‌ها به بیان قضایای مربوط به مقایسه‌ی زمان اجرای الگوریتم‌ها می‌پردازیم. توجه داشته باشید که شباهات فوق منجر به تسهیل حفظ قضایا می‌گردند.

تعدی: همه‌ی ۵ نماد فوق خاصیت تعدی دارند. (تشابه با اعداد) مثال:

$$f(n) = \Theta(g(n)) \wedge g(n) = \Theta(h(n)) \Rightarrow f(n) = \Theta(h(n))$$

همانی: روابط O و Ω و Θ خاصیت همانی دارند (تشابه با اعداد) مثال:

$$f(n) = O(f(n))$$

تقارنی: تنها Θ خاصیت تقارنی دارد. (تشابه با اعداد) مثال:

$$f(n) = \Theta(g(n)) \Leftrightarrow g(n) = \Theta(f(n))$$

تقارن ترانهاده[1]: مشابه با اعداد روابط زیر برقرار است:

$$f(n) = O(g(n)) \Leftrightarrow g(n) = \Omega(f(n))$$

$$f(n) = o(g(n)) \Leftrightarrow g(n) = \omega(f(n))$$

مثال: چون $n = \Omega(\lg n)$ داریم $\lg n = O(n)$

1 -Transpose Symmerty

📖 **نکته:** تنها تفاوت این نمادها با نمادهای عددی ان است که هر دو عدد a و b حتماً در یکی از ۳ رابطه‌ی =، ≤ یا ≥ با یکدیگر قرار می‌گیرند ولی ممکن از دو تابع در هیچ‌کدام از این روابط قرار نگیرند. مثلا $n^{\sin n+1}$ با هیچ تابع دیگری قابل قیاس نیست چرا که نمای آن بین ۰ تا ۲ هر مقداری را اختیار می‌کند.

۳-۱- مقایسه رشد توابع مشهور با یکدیگر

برای مقایسه‌ی قانون کلی وجود ندارد ولی به خاطر سپردن ترتیب‌های رشد زیر توصیه می‌شود:

$$\lg\lg n < \lg n < n < n^2 < 2^n < 3^n < n! < n^n$$

توجه کنید که برای سهولت از نماد $<$ استفاده شده است. اثبات نامساوی‌ها نیز با توجه به تعریف کار ساده‌ای است.

📖 **نکته**: برای مقایسه‌ی 2^n و $2^{\sqrt{2\lg n}}$ می‌توان از دو طرف lg گرفت و به دو عبارت ساده شده‌ی n و $\sqrt{2\lg n}$ رسید که طبق نامساوی‌های فوق n بزرگتر است لذا:

$$2^{\sqrt{2\lg n}} = O(2^n)$$

📖 **نکته:** گاهی اوقات جایگذاری n با یک عدد دیگر (عموماً عددی نمایی مانند 2^m) کارگشاست.

مثال

مقایسه‌ی $\sqrt{2}^{\lg n}$ و $2^{\sqrt{2\lg n}}$ تبدیل می‌شود به مقایسه‌ی $\sqrt{2}^m$ و $2^{\sqrt{2m}}$ که با استفاده از نکته‌ی قبلی و رساندن دو طرف به توان دو باید 2^m و $2^{\sqrt{8m}}$ را مقایسه کنیم که اولی بزرگ‌تر است. لذا:

$$\sqrt{2}^{\lg n} = \Omega(2^{\sqrt{2\lg n}})$$

📖 **نکته**: گاهی اوقات بازکردن فاکتوریل یا نمای دو عبارت به مقایسه‌ی آن‌ها کمک می‌کند. برای مثال به گزینه‌ی ۳ در سوال زیر توجه نمایید.

سوال

کدام یک از عبارات زیر غلط است؟ **(کنکور سراسری – ۸۱)**

۱) $10^n + n^{20} \notin \Theta(n^n)$ ۲) $\lg_2^n \in \Theta(\lg_{10}^n)$

۳) $(\lg_2^n)! \in \Omega(n!)$ ۴) $4n^2 + 5n^2 + 7n \in \Omega(\lg_2^n)$

پاسخ: به تحلیل هرکدام از گزینه‌ها به صورت جداگانه می‌پردازیم:

۱- طبق نامساوی‌های مشهور n^n رشد بیشتری از دیگر توابع دارد. توجه کنید که رشد سمت چپ $\Theta(10^n)$ است.

۲- تمامی lgها در پایه‌های مختلف رشد یکسانی دارند. چرا که با توجه به رابطه‌ی تبدیل پایه‌ها که در ادامه می‌آید، هر پایه‌ای تنها به صورت ضریب در پایه‌ی دیگر ظاهر می‌شود:

$$\lg_a^n = \lg_b^n \lg_a^b = \alpha \lg_b^n$$

۳- با استفاده از تکنیک باز کردن و این نکته که به ازای nهای بزرگ $n > \lg_2^n$ است داریم:

$\lg_۲^n < n \Rightarrow \lg_۲^n \times (\lg_۲^n - ۱) \times .... \times ۱ < n \times n - ۱ \times .... \times ۱$

$\Rightarrow (\lg_۲^n)! \in O(n!)$

۴- مقایسه‌ی رشد $\lg_۲^n$ و $n^۳$ در نامساوی‌ها درستی این گزینه را نشان می‌دهد.

لذا جواب درست در این سوال گزینه‌ی ۳ می‌باشد.

سوال

$f(n) = O(g(n))$ است. کدام یک از گزینه‌ها برای هر تابع با مقادیر مثبت f و g برقرار است؟ **(کنکور سراسری – ۸۳)**

۱) $g(n) = \Theta(f(n))$

۲) $۲^{f(n)} = O(۲^{g(n)})$

۳) $۲^{g(n)} = \Omega(۲^{f(n)})$

۴) $\lg(g(n)) = O(\lg f(n))$ با فرض $\lg(g(n)) \geq ۱$

پاسخ:

۱- غلط است چرا که معلوم نیست $f(n) = \Omega(g(n))$ برقرار باشد.

۲- چون تابع صعودی به دو طرف اعمال شده صحیح است.

۳- چون $g(n) = \Omega(f(n))$ است و به دو طرف تابع صعودی اعمال شده صحیح است.

۴- از آنجایی که lg به عکس رابطه مطرح شده در سوال اعمال شده است (یعنی به $g(n) = O(f(n))$) غلط است.

لذا هر دو پاسخ ۲ و ۳ صحیح است.

سوال

توابع $f(n) = ۴^{\lg n}$، $g(n) = (\lg n)^{\lg n}$ و $h(n) = \lg^۲ n$ را در نظر بگیرید. کدام گزاره صحیح است؟ **(کنکور سراسری– ۸۵)**

۱) $f(n) \in O(g(n)), f(n) \in \Omega(h(n))$

۲) $g(n) \in \Omega(h(n)), h(n) \in \Omega(f(n))$

۳) $f(n) \in \Theta(h(n))$ $g(n) \in \Omega(f(n))$

۴) $h(n) \in O(g(n)), f(n) \in \Theta(g(n))$

پاسخ:

برای مقایسه از جایگذاری $n = ۲^m$ استفاده می‌کنیم:

$f(n) = f(m) = ۴^{\lg ۲} = ۴^m$

$g(n) = g(m) = (\lg ۲^m)^{\lg ۲^m} = m^m$

$h(n) = \lg^۲ n = \lg n \lg n = h(m) = \lg ۲^m \lg ۲^m = m^۲$

طبق نامساوی‌های مشهود: $m^۲ < ۴^m < m^m \Rightarrow h(n) < f(n) < g(n)$

لذا گزینه‌ی ۱ صحیح است.