

دانش اگر در ثریا هم باشد مردمانی از سرزمین پارس بر آن دست خواهند یافت.

پیامبر اعظم (ص)

شرح جامع و نمونه سوالات

ساختمان‌های گسسته

«مهندسی کامپیوتر»

مولف: پیمان میرهادی

انتشارات ارشد

پیشگفتار ناشر

خداوند بزرگ را شاکریم که فرصتی عنایت فرمود تا بتوانیم قدمی در جهت گسترش علم و فرهنگ کشور عزیزمان برداریم و مسیری هموار را در اختیار مخاطبان و داوطلبان علاقمند به ادامه تحصیل قرار دهیم. از آنجائی که درحوزه کتاب‌های درسی و کمک درسی کارشناسی ارشد کتاب‌های زیادی به رشته تحریر در آمده است با این حال وجود یک مجموعه جامع، دقیق، کامل و دارای رفرنس(منابع) مستند احساس می‌شود.

همیشه دغدغه داشتیم که ای کاش می‌شد تمامی منابع پراکنده و گاهاً دست نایافتنی کنکور در یک مجموعه به گونه‌ای جذاب و شیوا آماده می‌شد و همچنین سوالات دوره‌های قبل کنکور نیز به گونه‌ای تشریحی پاسخ داده می شدند، که خدشه‌ای بر آنها وارد نشود و خیال داوطلبان عزیز آنقدر آسوده باشد که اطلاعات مندرج در پاسخنامه‌ها را برای بهره‌گیری در آزمون خود بکار گیرند. این کار با یاری خداوند بزرگ و همکاری نخبه‌ترین دانشجویان و اساتید کشور در انتشارات ارشد هماهنگ گردید و در تمامی مقاطع تحصیلی از کاردانی به کارشناسی، کارشناسی ارشد و دکتری در حوزهٔ آزمون‌های سراسری – آزاد و پیام نور بسته‌های آموزشی شامل کتاب‌های بانک سوالات و کتاب‌های شرح جامع درس آماده گردید. در تهیه مجموعه‌های فوق‌الذکر از فارغ‌التحصیلان کارشناسی ارشد و دکتری که حائز رتبه‌های تک رقمی کنکور می‌باشند، استفاده کرده‌ایم، تا شما عزیزان بتوانید در راستای افزایش توان علمی خود در جهت نیل به مقصود خویش نایل آیید. بدون تردید می‌توان گفت که برای اولین بار در نظام آموزشی کشور مجموعه‌ای به این سبک عرضه می‌شود که در کیفیت و کمیت بی‌نظیر بوده و تمامی نیازهای دانشجویان و داوطلبان عزیز را پوشش می‌دهد. امید است که استفاده از این مجموعه عزیزان را در جهت موفقیت در آزمون یاری رسانده باشد. در پایان لازم به ذکر است که بی نقصی محض از آن خداوند متعال می‌باشد، بنا براین از تمامی خوانندگان و داوطلبان عزیز خواهشمندیم نظرات سازنده خود را در مورد این کتاب به سایت انتشارات ارشد اعلام نمایند تا ما را در جهت هر چه بهتر آماده کردن این محصولات یاری رسانند.

با تشکر

ناشـــــر

www.arshadbook. ir

پیشگفتار مولف

کتاب حاضر، کتاب کمک آموزشی درس ساختمان گسسته است که چندین سال است در دانشکده‌های کامپیوتر دانشگاه‌های مختلف در درسی به همین عنوان تدریس می‌شود. گرچه این کتاب به هدف آمادگی برای آزمون‌های تحصیلات تکمیلی رشته‌های مهندسی فناوری اطلاعات، مهندسی کامپیوتر و علوم کامپیوتر تهیه شده است اما می‌تواند مورد استفاده دانشجویان رشته ریاضی و علاقه‌مندان ساختمان گسسته نیز قرار گیرد. ذکر این نکته لازم است که این اثر، کتابی کمک آموزشی است و با این فرض نگارش شده است که خواننده، دروس مربوط به ساختمان گسسته را در دوران تحصیل خود گذرانده است و حداقل یکی از کتب مرجع اصلی را مطالعه کرده و اکنون برای آزمون‌های چهارگزینه‌ای آماده می‌شود. به عبارت دیگر در این اثر سعی شده مطالب تستی و نکات مهمی را که در پاسخگویی به سوالات چهارگزینه‌ای در کوتاه‌ترین زمان موثر هستند، گردآوری شوند.

به خاطر حجم زیاد مطالب، ممکن است در بعضی از قسمتهای کتاب از مفاهیمی یاد شده باشد که در شرح، معرفی نشده باشند. ولی به دلیل اهمیت ذکر شده‌اند در مورد این مفاهیم اولیه خواننده را به کتب مرجع ارجاع می‌دهیم. در حقیقت این اصل بدیهی اما بسیار مهم را که نه تنها برای آزمون تحصیلات تکمیلی بلکه برای تمام آزمون‌های تستی باید رعایت شود، یادآوری می‌شود. «اول بر متن درس مسلط شوید و سپس به سراغ نکات تستی و تست‌ها بروید.»

در متن درس و پایان فصول تست‌های مختلفی گنجانده شده‌اند. در انتهای کتاب نیز تمام سوالات آزمون سراسری و آزمون دانشگاه آزاد مربوط به سال ۸۱ تا ۸۸ کارشناسی ارشد مهندسی فناوری اطلاعات و مهندسی کامپیوتر، با پاسخ تشریحی ضمیمه شده است. هرچند دقت زیادی به عمل آمده است که کتاب عاری از اشتباه باشد، اما بی‌گمان چنین نیست و تذکر خوانندگان و صاحب‌نظران ارجمند را به دیده منت می‌نهیم. خواهشمندیم نظرات و پیشنهادات سازنده خود را برای هر چه بهتر شدن این اثر به نشانی پست الکترونیکی زیر ارسال فرمایید.

Peyman.mirhadi@Gmail.Com

پیمان میرهادی

بهار ۱۳۸۹

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فصل اول: مبانی اصلی شمارش

۱. ۱- اصل جمع و اصل ضرب ۱۱

۱. ۲- جایگشت‌ها ۱۲

۱. ۳- قضیه دو جمله‌ای و ترکیب با تکرار (توزیع) ۱۲

خلاصه فصل ۱۵

پاسخ تست‌های آخر فصل ۱۶

پاسخ تست‌های آخر فصل ۲۰

فصل دوم: مبانی منطق و نظریه مجموعه‌ها

۲. ۱- ادعاهای پایه‌ای، جدول‌های ارزش و قانون‌های منطق ۲۷

۲. ۲- کلیاتی در باره نظریه مجموعه‌ها ۲۹

خلاصه فصل ۳۴

تست‌های آخر فصل ۳۵

پاسخ تست‌های آخر فصل ۳۷

فصل سوم: ویژگی‌های اعداد صحیح، تابع‌ها و زبان‌ها

۳. ۱- اصل خوش ترتیبی و قضیه اساسی حساب ۴۳

۳. ۲) تابع‌های ساده، یک به یک و پوشا ۴۵

۳. ۳- اصل لانه کبوتر و ترکیبهای تابعی ۴۷

۳. ۴- زبان‌ها: ماشین‌های متناهی حالت ۵۲

خلاصه فصل ۵۶

تست‌های آخر فصل ۵۷

پاسخ تست‌های آخر فصل ۶۳

فصل چهارم : اصل شمول و طرد و تابع‌های مولد

۴. ۱- اصل شمول و طرد ۶۷

۴. ۲- تابع‌های مولد ۶۸

۴. ۳- روابط بازگشتی ۷۰

خلاصه فصل ۷۲

تست‌های آخر فصل ۷۳

پاسخ تست‌های آخر فصل ۷۶

عنوان صفحه

فصل پنجم :نظریه گراف

۵. ۱- تعریف‌ها، یکریختی و درجه ۸۳
۵. ۲- گرافهای مسطح ۸۷
۵. ۳- مسیرهای همیلتونی و رنگ‌آمیزی گراف ۸۹
۵. ۴- درختها ۹۳
۵ . ۵- الگوریتم‌های کوتاه‌ترین مسیر ۹۸
خلاصه فصل ۱۰۳
تست‌های آخر فصل ۱۰۴
پاسخ تست های آخر فصل ۱۰۷

فصل ششم: جبر بولی

۶. ۱ – حلقه‌ها ۱۱۳
۶. ۲- گروه‌ها ۱۱۸
۶. ۳- دستگاه‌های جبری ۱۲۰
خلاصه فصل ۱۲۱
تست‌های آخر فصل ۱۲۳
پاسخ تست‌های آخر فصل ۱۲۶

فصل هفتم: هیأت‌های متناهی و طرح‌های ترکیباتی

۷. ۱- حلقه‌های چند جمله‌ای ۱۳۱
۷. ۲- چند جمله‌ای‌های تحویل‌ناپذیر: هیأت‌های متناهی ۱۳۳
۷. ۳- مربع های لاتین و هندسی‌های متناهی ۱۳۴
خلاصه فصل ۱۴۱
تست‌های آخر فصل ۱۴۲
پاسخ تست‌های آخر فصل ۱۴۴
سوالات مهندسی کامپیوتر سراسری سال ۱۳۸۱ ..... ۱۴۹
پاسخنامه مهندسی کامپیوتر سراسری سال ۱۳۸۱ ..... ۱۵۱
سوالات مهندسی کامپیوتر سراسری سال ۱۳۸۲ ..... ۱۵۳
پاسخنامه مهندسی کامپیوتر سراسری سال ۱۳۸۲ ..... ۱۵۴
سوالات مهندسی کامپیوتر سراسری سال ۱۳۸۳ ..... ۱۵۷
پاسخنامه مهندسی کامپیوتر سراسری سال ۱۳۸۳ ..... ۱۵۸
سوالات مهندسی کامپیوتر سراسری سال ۱۳۸۴ ..... ۱۶۰
پاسخنامه مهندسی کامپیوتر سراسری سال ۱۳۸۴ ..... ۱۶۲
سوالات مهندسی کامپیوتر سراسری سال ۱۳۸۵ ..... ۱۶۴
پاسخنامه مهندسی کامپیوتر سراسری سال ۱۳۸۵ ..... ۱۶۵
سوالات مهندسی کامپیوتر سراسری سال ۱۳۸۶ ..... ۱۶۷
پاسخنامه مهندسی کامپیوتر سراسری سال ۱۳۸۶ ..... ۱۶۸

عنوان.....صفحه

سوالات مهندسی کامپیوتر سراسری سال ۱۳۸۷ ..... ۱۷۰
پاسخنامه مهندسی کامپیوتر سراسری سال ۱۳۸۷ ..... ۱۷۱
سوالات مهندسی کامپیوتر سراسری سال ۱۳۸۸ ..... ۱۷۴
پاسخنامه مهندسی کامپیوتر سراسری سال ۱۳۸۸ ..... ۱۷۵
سوالات IT سراسری سال ۱۳۸۴ ..... ۱۷۷
پاسخنامه IT سراسری سال ۱۳۸۴ ..... ۱۷۹
سوالات IT سراسری سال ۱۳۸۵ ..... ۱۸۰
پاسخنامهIT سراسری سال ۱۳۸۵ ..... ۱۸۳
سوالات IT سراسری سال ۱۳۸۶ ..... ۱۸۵
پاسخنامهIT سراسری سال ۱۳۸۶ ..... ۱۸۷
سوالات IT سراسری سال ۱۳۸۷ ..... ۱۹۰
پاسخنامهIT سراسری سال ۱۳۸۷ ..... ۱۹۲
سوالات IT سراسری سال ۱۳۸۸ ..... ۱۹۴
پاسخنامه IT سراسری سال ۱۳۸۸ ..... ۱۹۶
سوالات مهندسی کامپیوتر آزادسال ۱۳۸۲ ..... ۲۰۱
پاسخنامه مهندسی کامپیوتر آزاد سال ۱۳۸۲ ..... ۲۰۲
سوالات مهندسی کامپیوتر آزاد سال ۱۳۸۳ ..... ۲۰۳
پاسخنامه مهندسی کامپیوتر آزاد سال ۱۳۸۳ ..... ۲۰۴
سوالات مهندسی کامپیوتر آزاد سال ۱۳۸۴ ..... ۲۰۵
پاسخنامه مهندسی کامپیوتر آزاد سال ۱۳۸۴ ..... ۲۰۶
سوالات مهندسی کامپیوتر آزاد سال ۱۳۸۵ ..... ۲۰۷
پاسخنامه مهندسی کامپیوتر آزاد سال ۱۳۸۵ ..... ۲۰۸
سوالات مهندسی کامپیوتر آزاد سال ۱۳۸۶ ..... ۲۱۱
پاسخنامه مهندسی کامپیوتر آزاد سال ۱۳۸۶ ..... ۲۱۲
سوالات مهندسی کامپیوتر آزاد سال ۱۳۸۷ ..... ۲۱۳
پاسخنامه مهندسی کامپیوتر آزاد سال ۱۳۸۷ ..... ۲۱۴
سوالات IT آزاد سال ۱۳۸۶ ..... ۲۱۷
پاسخنامه IT آزاد سال ۱۳۸۶ ..... ۲۱۹
سؤالات مهندسی IT آزاد سال۱۳۸۷ ..... ۲۲۱
پاسخنامه مهندسی IT آزاد سال ۱۳۸۷ ..... ۲۲۳
سؤالات مهندسی IT آزاد سال ۱۳۸۸ ..... ۲۲۴
پاسخنامه مهندسی IT آزاد سال ۱۳۸۸ ..... ۲۲۵

فصل اول

مبانی اصلی شمارش

عناوین اصلی

- اصل جمع و اصل ضرب
- جایگشت‌ها
- قضیه دو جمله‌ای و ترکیب با تکرار
- خلاصه فصل
- تست‌های آخر فصل
- پاسخ تست های آخر فصل

فصل اول

مبانی اصلی شمارش

۱. ۱- اصل جمع و اصل ضرب

اصل جمع: اگر بتوان کاری را به m راه و کار دیگری را به n راه انجام داد، و نتوان این دو کار را همزمان انجام داد، آن‌گاه هر یک از دو کار را می‌توان به یکی از $m+n$ راه انجام داد.

اصل ضرب (اصل انتخاب): اگر شیوه‌ی انجام کاری را بتوان به دو مرحله اول و دوم تجزیه کرد، و اگر m برآمد ممکن برای مرحله اول و n برآمد ممکن برای مرحله دوم وجود داشته باشد، آن‌گاه تعداد کل شیوه‌هایی که می‌توان کار مزبور را انجام داد، mn است.

مثال

۱- در انتخابات شورای مدرسه‌ای، ۷ داوطلب از کلاس سوم و ۴ داوطلب از کلاس دوم برای عضویت در شورا نامزد شده‌اند.

الف) اگر یکی از داوطلبان رئیس باشد، چند امکان برای برنده احتمالی وجود دارد؟

ب) چند امکان برای یک جفت داوطلب (یکی از هر کلاس) وجود دارد تا برای دور دوم انتخابات برای ریاست، با هم رقابت کنند؟

پاسخ) الف – طبق اصل جمع، ۱۱=۴+۷ امکان برای برنده احتمالی وجود دارد.

ب – طبق اصل ضرب، ۲۸= ۴×۷ امکان برای جفت داوطلب دور دوم انتخابات ریاست شورا وجود دارد.

تست ۱

اگر فرض کنیم که اتومبیل پراید در ۴ مدل، ۸ رنگ، ۲ حجم موتور و ۳ نوع دنده، تولید می‌شود، به ترتیب از راست به چپ چند پراید متمایز ساخته می‌شود و اگر یکی از رنگ‌های موجود آبی باشد، چند پراید آبی رنگ با نوع دنده اتوماتیک ساخته می‌شود؟

۱) ۱۹۲–۳۲ ۲) ۲۵۶–۳۲ ۳) ۱۹۲–۸ ۴) ۲۵۶–۸

پاسخ) گزینه «۳»

طبق اصل ضرب تعداد پرایدهای متمایز حاصل ضرب هر ۴ عدد می‌شود که:

$$۲\times۲\times۸\times۴=۱۹۲$$

و اگر پراید آبی‌رنگ باشد و نوع دنده اتوماتیک مد نظر باشد، تعداد رنگ‌ها و نوع دنده‌ها در اصل ضرب یک می‌شود یعنی داریم:

$$۱\times۲\times۱\times۴=۸$$

پس گزینه ۳ صحیح است.

۱. ۲- جایگشت‌ها

نکته ۱. ۱) اگر n شی متمایز که آن‌ها را با $a_1, a_2, ..., a_n$ نشان می‌دهیم موجود باشند و r عددی صحیح با شرط $1 \le r \le n$ باشد، آن‌گاه بنابر اصل ضرب، تعداد آرایش‌ها یا جایگشت‌های r شی از n عبارت است از:

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times (n-r+1) = (n)(n-1)(n-2) : ..(n-r+1)$$

r امین مکان — سومین مکان — دومین مکان — اولین مکان

$$\times \frac{(n-r)(n-r-1)...(3)(2)(1)}{(n-r)(n-r-1)...(3)(2)(1)} = \frac{n!}{(n-r)!} = P(n,r)$$

این عبارت، همان ترتیب است در مقابل ترکیب که یک $r!$ در مخرج در $(n-r)!$ ضرب می‌شود. از طرفی اگر n شی داشته باشیم که n_1 شی آن از نوع اول، n_2 شی آن از نوع دوم، ... ، n_r شی آن از نوع rام باشند و $n_1 + n_2 + ... + n_r = n$، آن‌گاه $\frac{n!}{n_1! n_2! ... n_r!}$ آرایش از n شی مفروض موجود است در صورتی‌که اشیاء هم‌نوع نامتمایز باشند.

مثال

۲- به چند راه می‌توان حروف e, e, e, d, c, b, a را آرایش داد به قسمی که هیچ e مجاور e دیگر نباشد؟

پاسخ) برای این‌که هیچ e مجاور e دیگر نباشد باید حروف d, c, b, a بین e‌ها قرار گیرند. یعنی به عبارت دیگر ۴ مکان وجود دارد که می‌خواهیم با ۴ حرف آن‌ها را پر کنیم که تعداد حالات ممکن $4!$ می‌شود.

۱. ۳- قضیه دو جمله‌ای و ترکیب با تکرار (توزیع)

قضیه دو جمله‌ای که تست‌هایی مبنی بر یافتن ضریب اجزا آن به وفور مشاهده می‌شود، به این شرح است:

قضیه: اگر x, y دو متغیر باشند و n عددی صحیح و مثبت باشند، آن‌گاه:

$$(x+y)^n = \binom{n}{0} x^0 y^n + \binom{n}{1} x^1 y^{n-1} + \binom{n}{2} x^2 y^{n-2} + ... + \binom{n}{n-1} x^{n-1} y^1 + \binom{n}{n} x^n y^0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

مثال

۳- ضریب $x^5 y^2$ در $(x+y)^7$ چیست؟

پاسخ) با توجه به قضیه دو جمله‌ای واضح است که $n = 7$ و ضریب $x^5 y^2$، $\binom{7}{5} = \binom{7}{2} = 21$ است.

مثال

۴- ضریب $a^5 b^2$ در $(2a-3b)^7$ کدام است؟

حل) در این مثال کافی است برای قضیه دو جمله‌ای، $x = 2a, y = -3b$ را در نظر بگیریم پس ضریب مدنظر $\binom{7}{5}(2)^5(-3)^2$ است.

نکته ۱. ۲) به ازاء هر عدد صحیح $n > 0$،

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + ... + \binom{n}{n} = 2^n$$

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - ... + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$$

اگر تعداد جملات در مجموع قضیه دو جمله‌ای زیاد باشد ضریب اجزا از قضیه زیر بدست می‌آید:

قضیه: به ازای اعداد صحیح مثبت t,n، ضریب $x_1^{n_1}x_2^{n_2}x_3^{n_3}...x_t^{n_t}$ در $(x_1+x_2+x_3+...+x_t)^n$ برابر است با $\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!...n_t!}$ که در آن هر n_i عدد صحیحی است با شرط $0 \le n_i \le n$، به ازای همه‌ی مقادیر $1 \le i \le t$ و $n_1+n_2+n_3+...+n_t = n$

📖**نکته ۱. ۳)** به طور کلی وقتی n شی متمایز داریم و می‌خواهیم r قلم از این اشیا را «با تکرار» انتخاب کنیم:

$$\frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!} = \binom{n+r-1}{r}$$

روش انتخاب وجود خواهد داشت. این عبارت، تعداد ترکیب‌های r شی از n شی با تکرار است یعنی $C(n+r-1,r)$ یادآوری می‌شود که معمولاً ترتیب با $P(r,n)$ و ترکیب با $C(r,n)$ نشان داده می‌شوند.

مثال

۵- یک مغازه شیرینی فروشی ۱۰ نوع بیسکویت عرضه می‌کند. به چند طریق می‌توان ۶ نوع بیسکویت انتخاب کرد. (تکرار مجاز است)

پاسخ) این سوال انتخاب r قلم از n شی با تکرار است. پس داریم، $C(10+6-1,6) = C(15,6) = \binom{15}{6} = \frac{15!}{6!9!}$

مثال

۶- به چند طریق می‌توان هفت گلابی و شش پرتقال را بین چهار کودک به قسمی توزیع کرد که هر کودک حداقل یک گلابی داشته باشد؟

پاسخ) اگر هر کودک حداقل یک گلابی دریافت کند برای توزیع سه گلابی دیگر $C(4+3-1,3) = 20$ راه وجود دارد. یعنی یک کودک می‌تواند ۴ گلابی داشته باشد و بقیه هر یک یکی. برای توزیع پرتقال‌ها $C(4+6-1,6) = 84$ راه وجود دارد. پس بنابر اصل ضرب $20 \times 84 = 1680$ راه برای توزیع میوه داریم.

به یاد داشته باشید که سه حالت زیر با هم هم‌ارزند، یعنی جوابگویی به این سه حالت یکسان است:

الف)تعداد جواب‌های صحیح معادله $x_1+x_2+...+x_n = r, x_i \ge 0, 1 \le i \le n$

ب) تعداد انتخاب‌های با تکرار، با اندازه r، از گردایه‌ای به اندازه‌ی n

ج) تعداد راه‌هایی که می‌توان r شی همانند را در n ظرف متمایز توزیع کرد.

مثال

۷- به چند طریق می‌توان ده مهره سفید (همانند) را در شش ظرف متمایز توزیع کرد؟

پاسخ) حل این مثال هم‌ارز یافتن تعداد جواب‌های صحیح نامنفی معادله $x_1+x_2+...+x_6 = 10$ است. بنابراین جواب عبارت است از: $C(6+10-1,10) = 3003$

در مطالعه نظریه کدگذاری جبری و نظریه زبان‌های کامپیوتری، آرایش‌هایی را در نظر می‌گیریم که به رشته موسوم‌اند و از الفبای نمادهای معینی ساخته می‌شوند. اگر این الفبای معین، مثلاً نمادهای ۰,۱,۲ باشند، آن‌گاه ۰۱,۱۱,۲۱,۱۲,۲۰ پنج رشته از نه رشته به درازای دو هستند. از جمله ۲۷ رشته به درازای سه، ۰۰۰,۰۱۲,۲۰۲,۱۱۰ هستند.

به طور کلی، اگر n عدد صحیح مثبتی باشند، آن‌گاه بنابر اصل ضرب، 3^n رشته به درازای n برای الفبای ۰,۱,۲ وجود دارند. اگر $x = x_1x_2x_3...x_n$ یکی از این رشته‌ها باشد، وزن x را با $wt(x)$ نشان داده می‌شود به وسیله‌ی $wt(x) = x_1+x_2+x_3+...+x_n$ تعریف می‌کنیم. به عنوان مثال برای حالت، $n = 2$ داریم $wt(12) = 3$ و $wt(22) = 4$، برای $n = 3$، $wt(101) = 2, wt(210) = 3$ و $wt(222) = 6$.

حال می‌خواهیم تعیین کنیم که بین $۳^{۱۰}$ رشته به طول ۱۰، چند رشته وزن زوج دارند. چنین رشته‌ای وقتی وزن زوج دارد که تعداد ۱ها در آن زوج باشد. شش حالت مختلف برای بررسی وجود دارند.

اگر رشته x شامل ۱ها نباشد، آن‌گاه هر یک از ده مکان در x را می‌توان با ۰ یا ۲ پرکرد، و بنابر اصل ضرب، $۲^{۱۰}$ رشته از این نوع وجود دارند. وقتی رشته شامل دو تا ۱ باشد مکان‌های این دو تا ۱ را به $\binom{۱۰}{۲}$ راه می‌توان برگزید، بعد که این دو مکان مشخص شدند، $۲^{۸}$ راه برای قراردادن ۰ یا ۲ در هشت مکان وجود دارد. بنابراین $۲^{۸}\binom{۱۰}{۲}$ رشته به درازای زوج وجود دارد که شامل دو تا ۱ هستند. تعداد رشته‌ها برای چهار حالت دیگر به این ترتیب‌اند: اگر تعداد ۱ها ۴ تا باشند تعداد رشته‌ها $۲^{۶}\binom{۱۰}{۴}$ است. اگر ۶ یک وجود داشته باشد تعداد رشته‌ها $۲^{۴}\binom{۱۰}{۶}$ است. اگر ۸ یک وجود داشته باشد تعداد رشته‌ها $۲^{۲}\binom{۱۰}{۸}$ است و اگر ۱۰ یک وجود داشته باشد تعداد رشته‌ها $\binom{۱۰}{۱۰}$ است.

در نتیجه، بنابر اصل جمع تعداد رشته‌های به طول ۱۰ که وزن زوج دارند عبارت است از:

$$۲^{۱۰}+\binom{۱۰}{۲}۲^{۸}+\binom{۱۰}{۴}۲^{۶}+\binom{۱۰}{۶}۲^{۴}+\binom{۱۰}{۸}۲^{۲}+\binom{۱۰}{۱۰}=\sum_{n=۰}^{۵}\binom{۱۰}{۲n}۲^{۱۰-۲n}$$

برای اعداد صحیح r,n با $n\geq r\geq ۰$، $\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$. این فرمول را می‌توان به صورت جبری از روی فرمول $\binom{n}{r}$ ثابت کرد. وقتی با انتخابی با حجم r از گردایه n شی متمایز سروکار داریم، فرآیند انتخاب، $(n-r)$ شی را به حساب نمی‌آورد. پس رابطه $\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$، موید وجود تناظری بین انتخاب‌های به حجم r و انتخاب‌های به حجم $n-r$ است.

حال به بررسی مثالی از بسط دو جمله‌ای می‌پردازیم. در بسط دو جمله‌ای $(x+y)^n$، هر جمله به صورت $\binom{n}{k}x^k y^{n-k}$ است، و بنابراین، تعداد کل جمله‌های بسط برابر تعداد جواب‌های صحیح نامنفی $n_۱+n_۲=n$ است ($n_۱$ نمای x و $n_۲$ نمای y است). این تعداد برابر است با $C(۲+n-۱,n)=n+۱$.

گرچه تجربه در تشخیص الگو با ارزش است، اما همیشه برای یافتن یک اصل کلی کافی نیست. در اینجا دانستن این که چند جمله در بسط $(w+x+y+z)^{۱۰}$ وجود دارد ارزش چندانی ندارد. هر جمله مشخص در این بسط به صورت $\binom{۱۰}{n_۱,n_۲,n_۳,n_۴}$ است، که در آن $n_۱+n_۲+n_۳+n_۴=۱۰, ۱\leq i\leq ۴, ۰\leq n_i$. این معادله را می‌توان به $C(۴+۱۰-۱,۱۰)=۲۸۶$ راه حل کرد و لذا ۲۸۶ جمله در بسط $(w+x+y+z)^{۱۰}$ وجود دارد.

تست ۲

به چند طریق می‌توان ۱۰ مهره یکسان را بین ۶ ظرف متمایز توزیع کرد؟

۱) $۱۰!$ ۲) ۳۰۰۱ ۳) ۳۰۰۳ ۴) $۹!$

پاسخ) گزینه ۳ صحیح است.

این سوال هم ارز است با تعداد جواب‌های صحیح نامنفی معادله $x_۱+x_۲+\cdots+x_۶=۱۰$ است که برابر است با

$$\binom{۶+۱۰-۱}{۱۰}=۳۰۰۳$$

خلاصه فصل

در این فصل به بیان گذرای مبانی اصلی شمارش پرداختیم که شاید ظاهر ساده‌ای داشته باشند اما محل طرح سوالات بسیاری هستند. از این میان تبحر در اصل جمع و اصل ضرب مهم است. کاملاً شمارش، جایگشت ها و مسائل مربوط به آن‌ها نقش مهمی در نظریه احتمالات دارند. به عنوان جمع‌بندی، در این قسمت به چند نکته دیگر اشاره می‌کنیم:

- تعداد تبدیلات r شی از nشی با فرض مجاز بودن تکرار عناصر برابر است با n^r
- تعداد جواب‌های صحیح نامنفی برای معادله $x_1 + x_2 + \cdots + x_n < k$ برابر با تعداد جواب‌های صحیح نامنفی برای معادله $x_1 + x_2 + \cdots + x_n + y = k - 1$ است. بنابراین تعداد جواب‌های صحیح نامنفی برابر است با $\binom{n+k-1}{k-1}$
- تعداد جایگشت‌ها یا تبدیلات n شی متمایز برابر است با $n!$
- تعداد حالات ممکن برای قرار دادن m شی یکسان بین n ظرف متمایز به طوری که هیچ ظرفی خالی نماند، برابر است با $\binom{m-1}{n-1}$
- تعداد مثلث‌هایی که حداقل یکی از اضلاع آن‌ها، یک چند ضلعی منتظم است، برابر است با $n + n(n-4)$(منظور ایجاد مثلث با رئوس یک n ضلعی منتظم است)

تست‌های آخر فصل

۱- یک رستوران اعلام کرده است که هر مشتری غذای خود را با تمام یا چند تا از مخلفات زیر و یا بدون آن‌ها می‌تواند سفارش دهد: سس قرمز، سس سفید، خردل، کاهو، گوجه، پیاز، خیارشور، پنیر، قارچ. چند نوع غذا با مخلفات می‌توان سفارش داد. (یک غذای یکسان مدنظر است)

۱) $P(۱۰,۹)$ ۲) $\frac{۹!}{۱!۲!۳!}$ ۳) $۲^۹$ ۴) $P(۱۰,۱۰)$

۲- برای همه حرف‌های SOCIOLOGICAL چند آرایش وجود دارد؟

۱) $۲^{۱۲}$ ۲) $P(۱۲,۴)$ ۳) $\frac{۱۲!}{۳!۲!۲!۲!}$ ۴) $\frac{۱۱!}{۳!۲!۲!۳!}$

۳- در چند تا از آرایش‌های ممکن سؤال قبل، G,A مجاورند؟

۱) $۲\left[\frac{۱۱!}{۳!۲!۲!۲!}\right]$ ۲) $\frac{۱۱!}{۳!۲!۲!۲!}$ ۳) $۲^{۱۲}$ ۴) $\frac{۱۱!}{۳!۲!۲!}$

۴- مطلوب است تعداد اعداد صحیح هفت‌رقمی که رقم سمت چپ آن‌ها صفر نباشد و در آن‌ها هیچ رقم تکراری وجود نداشته باشد.

۱) ۱۳۶۰۸۰ ۲) ۵۴۴۳۲۰ ۳) ۳۲۴۱۲۸ ۴) ۴۴۲۲۱۸

۵- به چند طریق می‌توان هفت نفر را دور میزگردی نشاند؟

۱) $۷!$ ۲) $۶!$ ۳) $P(۷,۷)$ ۴) بینهایت

۶- چند بایت شامل حداقل شش تا یک وجود دارد؟

۱) ۳۰ ۲) ۳ ۳) ۸ ۴) ۳۷

۷- ضریب $xyz^{-۲}$ در $(x-۲y+۳z^{-۱})^۴$ چیست؟

۱) ۲۱۶ ۲) ۴ ۳) -۲۱۸ ۴) -۲۱۶

۸- برای همه مقادیر $n \geq ۱$، $n\binom{m+n}{m}$ معادل کدام گزینه است؟

۱) $m\binom{m+n}{m+۱}$ ۲) $n\binom{m+n}{m+۱}$ ۳) $(m+۱)\binom{m+n}{m+۱}$ ۴) $(m+۱)\binom{m+۱}{m+n}$

۹- چند جواب صحیح نامنفی برای جفت معادله زیر وجود دارد؟

$$\begin{cases} x_۱ + x_۲ + x_۳ + ... + x_۷ = ۳۷ \\ x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۶ \end{cases}$$

۱) $\binom{۳۴}{۳۱}\binom{۸}{۶}$ ۲) $\binom{۳۷}{۳۱}\binom{۸}{۶}$ ۳) $\binom{۳۴}{۳۱}\binom{۶}{۳}$ ۴) $\binom{۳۷}{۳۱}\binom{۶}{۳}$

۱۰- تعداد راه‌های توزیع m شی همانند در n ظرف متمایز، به شرط این‌که هیچ ظرفی خالی نماند کدام است؟

۱) $C(m-۱,n-۱)$ ۲) $C(n-۱,m-۱)$ ۳) $C(m-۱,m-n)$ ۴) ۳,۱

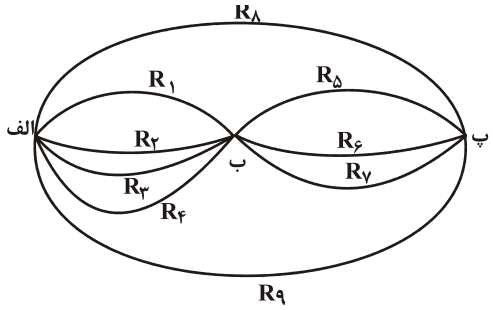
۱۱- به چند راه می‌توان دوازده سیب را بین ۵ کودک توزیع کرد به قسمی که هیچ کودکی بیش از ۷ سیب دریافت نکند؟

۱) ۱۶۴۰ ۲) ۱۴۸۰ ۳) ۱۴۴۰ ۴) ۱۸۲۰

۱۲- علی ۱۵ کتاب مختلف دارد و می‌خواهد آن‌ها را در دو قفسه به طوری که در هر قفسه حداقل یک کتاب وجود داشته باشد قرار دهد. او به چند روش می‌تواند این کار را انجام دهد؟ (فرض کنید قرار است کتاب‌ها را به صورت عمودی پهلوی یکدیگر از سمت چپ قفسه بچینند)

۱) ۱۵! ۲) (۱۵)(۱۵!) ۳) (۱۴)(۱۵!) ۴) ۱۴!

۱۳- اگر به روش زیر جاده‌های دو طرفه‌ای بین سه شهر وجود داشته باشد، به چند طریق می‌توان از شهر الف به شهر پ رفت؟ به چند روش می‌توان از شهر الف به شهر پ رفت و برگشت؟



۱) ۱۴-۱۴
۲) ۱۴-۱۹۶
۳) ۶-۱۴
۴) ۶-۱۹۶

۱۴- کدام گزینه برای هر عدد صحیح $n, r \geq ۰$، اگر $n + r > ۱$ درست است؟

۱) $P(n+۱,r) = \left(\frac{n+۱}{n+۱-r}\right)P(n,r)$ ۲) $P(n+۱,r) = \left(\frac{n}{n+۱-r}\right)P(n,r)$

۳) $P(n+۱,r) = \left(\frac{n}{r}\right)P(n,r)$ ۴) $P(n+۱,r) = nP(n,r)$

۱۵- یک توالی حروف مانند abcba که با معکوس کردن ترتیب حروف (یعنی از آخر به اول نوشتن ـ مانند کلمه گرگ)، کلمه یکسانی بدست می‌آید پالیندروم (Palindrome) نامیده می‌شود. اگر تکرار حرف جایز باشد چند پالیندروم، با ۵ حرف وجود دارد؟ با ۶ حرف چند تا؟ (الفبای انگلیسی ۲۶ حرف دارد)

۱) $۲۶^۳ - ۵^۳$ ۲) $۲۶^۳ - ۲۶^۳$ ۳) $۵^۳ - ۲۶^۳$ ۴) $۲۶^۳ - ۲۵^۳$

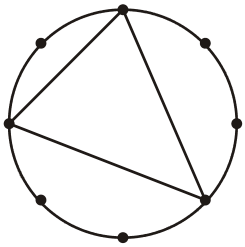
۱۶- اگر n یک عدد صحیح مثبت باشد و $n>1$، آن‌گاه کدام گزینه مربع کامل است؟

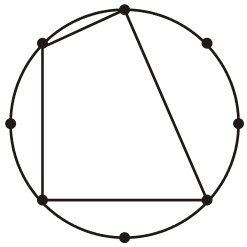
۱) $\binom{n+1}{2}$ ۲) $\binom{n-1}{2}+\binom{n+1}{2}$ ۳) $\binom{n-1}{2}$ ۴) $\binom{n}{2}+\binom{n-1}{2}$

۱۷- اگر قرار باشد از بین ۱۰ مرد و ۱۰ زن یک کمیته ۱۲ نفری تشکیل شود، به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد اگر بخواهیم در هر صورت تعداد زنان بیشتر از مردان باشد؟

۱) $\sum_{i=7}^{10}\binom{10}{i}\binom{10}{12-i}$ ۲) $\sum_{i=1}^{5}\binom{10}{2i}\binom{10}{12-2i}$ ۳) $\binom{10}{7}\binom{10}{5}$ ۴) $\sum_{i=5}^{10}\binom{10}{i}\binom{10}{10-i}$

۱۸- اگر هشت نقطه به فواصل مساوی روی دایره‌ای مشخص شده باشند، چند چندضلعی درون این دایره می‌توان رسم کرد؟ (یک سه ضلعی و یک چهار ضلعی دلخواه به عنوان نمونه نشان داده شده‌اند)





۱) ۲۵۶
۲) $8!$
۳) ۱۲
۴) ۴۳۸

۱۹- ضریب xyz^{-2} در $(2x-y-z)^4$ کدام است؟

۱) -24 ۲) ۲۴ ۳) ۱۲ ۴) -216

۲۰- کدام گزینه درست است؟

۱) $(1+x)^n-\binom{n}{1}x^1(1+x)^{n-1}+\binom{n}{2}x^2(1+x)^{n-2}-\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}x^n=e^x$

۲) $(1+x)^n-\binom{n}{1}x^1(1+x)^{n-1}+\binom{n}{2}x^2(1+x)^{n-2}-\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}x^n=1$

۳) $(1+x)^n+\binom{n}{1}x^1(1+x)^{n-1}+\binom{n}{2}x^2(1+x)^{n-2}+\ldots+\binom{n}{n}x^n=1$

۴) $(2+x)^n-\binom{n}{1}(x+1)(2+x)^{n-1}+\binom{n}{2}(x+1)^2(2+x)^{n-2}-\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}(x+1)^n=e^x$

۲۱- به چند طریق ۱۵ آب‌نبات را بین ۵ کودک می‌توان تقسیم کرد به قسمی که کوچکترین کودک فقط یک یا دو آب‌نبات داشته باشد؟

۱) $\binom{16}{13}+\binom{15}{5}$ ۲) $\binom{15}{5}+\binom{17}{14}$ ۳) $\binom{15}{4}+\binom{15}{5}$ ۴) $\binom{16}{13}+\binom{17}{14}$

۲۲- به چند طریق می‌توان به معادله زیر پاسخ داد؟

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ + x_۵ < ۴۰$$

$$x_i \geq ۰ \quad ۱ \leq i \leq ۵$$

۱) $\binom{۴۵}{۴۰}$ ۲) $\binom{۴۵}{۳۹}$ ۳) $\binom{۴۴}{۳۹}$ ۴) $\binom{۴۴}{۴۰}$

۲۳- برای هر عدد صحیح $n \geq ۱$ کدام گزینه درست است؟

۱) $\binom{۲n}{n} - \binom{۲n}{n-۱} = \frac{۱}{n+۱}\binom{۲n}{n}$ ۲) $\binom{۲n}{n} - \binom{۲n}{n-۱} = \frac{n}{n+۱}\binom{۲n}{n}$

۳) $\binom{۲n}{n} + \binom{۲n}{n-۱} = \frac{۱}{n+۱}\binom{۲n}{n}$ ۴) $\binom{۲n}{n} + \binom{۲n}{n-۱} = \frac{n}{n+۱}\binom{۲n}{n}$

۲۴- به چند روش می‌توان از نقطه $(۰,۰)$ به $(۷,۳)$ رفت اگر تنها حرکات مجاز $R:(x,y)\to(x+۱,y)$ و $U:(x,y)\to(x,y+۱)$ باشند به صورتی که مقدار U هیچ وقت از R بیشتر نشود؟

۱) $\binom{۱۰}{۷}\binom{۸}{۵}$ ۲) $\binom{۱۰}{۷}\binom{۵}{۸}$ ۳) $۵\binom{۱۰}{۷}$ ۴) $\binom{۱۰}{۳}\binom{۵}{۸}$

۲۵- یک سکه ۶۰ بار انداخته می‌شود و ۴۵ بار شیر و ۱۵ بار خط می‌آید. در چند مورد این شیر و خط‌ها، بدون خط‌های متوالی است؟

۱) $\binom{۴۶}{۱۵}$ ۲) $\binom{۴۶}{۱۶}$ ۳) $\binom{۴۶}{۳۱}$ ۴) $\binom{۳۱}{۱۵}$

پاسخ تست‌های آخر فصل

۱- گزینه «۳»

در این سوال ۹ مورد مخلفات غذا ذکر شده که هر کدام در غذای سفارشی می‌توان وجود داشته باشد یا وجود نداشته باشد پس برای هر مورد مخلفات دو حالت وجود دارد و در نتیجه در کل $۲×۲×۲×۲×۲×۲×۲×۲×۲=۲^۹$ حالت غذا می‌توان سفارش داد. بنابراین گزینه ۳ صحیح است.

۲- گزینه «۳»

در این سوال بحث جایگشت اشیاء مطرح است که اشیاء همنوع وجود دارند. در کلمه مطرح شده سه حرف O و دو حرف I و دو حرف L و دو حرف C موجود است و تعداد کل حروف ۱۲ است. پس تعداد آرایش‌های موجود $\frac{۱۲!}{۳!۲!۲!۲!}$ است.

۳- گزینه «۱»

اگر G,A کنار هم را یک حرف در نظر بگیریم، تعداد جایگشت‌های ۱۱ حرف مطرح است که اعضای هم‌نوع دارند. اما G,A کنار هم، به صورت AG و GA می‌توانند باشند یعنی هر یک از جایگشت‌های ۱۱ حرفی دو حالت دارند پس تعداد کل آرایش‌های ممکن که G,A مجاور باشند گزینه ۱ است.

۴- گزینه «۲»

اگر عدد ۷ رقمی را به این صورت فرض کنیم:

A	B	C	D	E	F	G

برای مکان A، ۹ عدد می‌توان جایگزین کرد چون در صورت سوال گفته شده صفر نمی‌تواند باشد. برای مکان B نیز ۹ عدد می‌توان جایگزین کرد چون یکی از ارقام ۱ تا ۹ برای مکان A استفاده شده ولی در عین حال صفر نیز در این مکان می‌توان استفاده کرد. به همین ترتیب برای مکان C، ۸ عدد، برای مکان D، ۷ عدد، برای مکان E، ۶ عدد، برای مکان F، ۵ عدد و در نهایت برای مکان G، ۴ عدد در اختیار داریم تا جایگزین کنیم. پس کلاً $۹×۹×۸×۷×۶×۵×۴=۵۴۴۳۲۰$ عدد مختلف تولید می‌شود.

۵- گزینه «۲»

در سوالاتی که جایگشت‌های دور میز گرد مطرح است، یک نفر را ثابت در نظر می‌گیریم و جایگشت بقیه را حساب می‌کنیم. در این سوال اگر یک نفر را ثابت فرض کنیم !۶ حالت وجود خواهد داشت.

۶- گزینه «۴»

تعداد بایت‌های با ۶ یک $\binom{۸}{۶}$ است، تعداد بایت‌های با ۷ یک $\binom{۸}{۷}$ و تعداد بایت‌های با ۸ یک $\binom{۸}{۸}$ است

پس $\binom{۸}{۸}+\binom{۸}{۷}+\binom{۸}{۶}=۳۷$

۷- گزینه «۴»

$$\binom{۴}{۱,۱,۲}(-۲)(۳^۲) = -۱۲۶$$

۸- گزینه «۳»

$$n\binom{m+n}{m} = \frac{(m+n)!}{m!n!} = \frac{(m+n)!}{m!(n-۱)!} = (m+۱)\frac{(m+n)!}{(m+۱)(m!)(n-۱)!} = (m+۱)\frac{(m+n)!}{(m+۱)!(n-۱)!} = (m+۱)(\frac{m+n}{m+۱})$$

۹- گزینه «۱»

تعداد راه‌های توزیع ۶ مهره در ۳ ظرف بدون محدودیت که همان جواب معادله $x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۶$ است برابر است با $\binom{۸}{۶} = \binom{۶+۳-۱}{۶}$ و تعداد توزیع ۳ مهره در ۴ ظرف بدون محدودیت که جواب معادله $x_۱ + x_۲ + x_۳ + ... + x_۷ = ۳۷$ با این فرض است که $x_۱ + x_۲ + x_۳$ یک ظرف با ۶ مهره از قبل هستند برابر است با $\binom{۳۴}{۳۱} = \binom{۳۱+۴-۱}{۳۱}$

۱۰- گزینه «۴»

یکی از m شی همانند را در هر یک از n ظرف متمایز قرار می‌دهیم. $m-n$ شی همانند باقی می‌مانند که باید در n ظرف متمایز قرار گیرند. این کار با تعداد $\binom{m-۱}{n-۱} = \binom{m-۱}{m-n} = \binom{n+(m-n)-۱}{m-n}$ توزیع انجام می‌شود.

۱۱- گزینه «۴»

تعداد راه‌های توزیع ۱۲ سیب بین ۵ کودک $\binom{۱۶}{۱۲} = \binom{۱۲+۵-۱}{۱۲}$ است. تعداد حالاتی که کودکی وجود داشته باشد که بیش از ۷ سیب دریافت کند $۵\binom{۸}{۴}$ است زیرا اگر کودکی ۸ سیب دریافت کند ۴ سیب خواهیم داشت که می‌خواهیم بین ۵ کودک تقسیم کنیم که $\binom{۸}{۴} = \binom{۵+۴-۱}{۴}$ روش می‌شود و چون ۵ کودک وجود دارد تعداد حالات ممکن $۵\binom{۸}{۴}$ است پس جواب سؤال $\binom{۱۶}{۱۲} - ۵\binom{۸}{۴} = ۱۸۲۰$ است.

۱۲- گزینه «۳»

فرض کنیم می‌خواهد سه کتاب را در یک قفسه و ۱۲ کتاب را در قفسه دیگر بگذارد. این تقسیم‌بندی به ۱۵! روش قابل انجام است. در حقیقت برای هر تقسیم‌بندی به صورتی که دو قفسه غیر خالی داشته باشیم ۱۵! روش داریم. از طرفی چون به ۱۴ روش می‌توانیم کتاب‌ها را به دو زیر گروه که مجموعشان ۱۵ شود تقسیم کنیم پس در کل ۱۵!×۱۴ روش برای تقسیم‌بندی کتاب‌ها وجود دارد.

۱۳- گزینه «۲»

چهار جاده از شهر الف به شهر ب و سه جاده از شهر ب به پ وجود دارد پس طبق اصل ضرب $۴\times۳=۱۲$ جاده از شهر الف به پ وجود دارد که از شهر ب می‌گذرد. از آنجاییکه دو جاده به صورت مستقیم از شهر الف به پ وجود دارد پس در کل $۱۲+۲=۱۴$ راه برای مسافرت از شهر الف به پ وجود دارد.

طبق نتیجه حاصله و اصل ضرب، $۱۴\times۱۴=۱۹۶$ راه برای مسافرت رفت و برگشت از شهر الف به پ وجود دارد (دقت کنید که ممکن است مسیر رفت و برگشت یکسان نباشد)

۱۴- گزینه «۱»

$$P(n+۱,r)=(n+۱)!/(n+۱-r)!=[(n+۱)/(n+۱-r)].[n!/(n-r)!]=[(n+۱)/(n+۱-r)]P(n,r)$$

۱۵- گزینه «۲»

برای ۵ حرف $۲۶^۳$ پالیندروم موجود است چون برای حرف اول ۲۶ انتخاب داریم، حرف دوم هم ۲۶ حرف انتخاب داریم چون تکرار جایز است و از طرفی به وسط کلمه نرسیده‌ایم. برای حرف سوم هم ۲۶ حرف ممکن است چون حرف وسط است و طبق تعریف پالیندروم لزومی به یکسان بودن با حرف دیگری ندارد. دو حرف آخر باید به ترتیب یکسان با حرف اول و دوم باشند پس به طور کلی $۲۶\times۱\times۱\times۲۶\times۲۶=۲۶^۳$ کلمه با این خصوصیات قابل حصول است. برای ۶ حرف $۲۶\times۲۶\times۲۶\times۱\times۱\times۱=۲۶^۳$ کلمه به دست می‌آید.

۱۶- گزینه «۴»

$$\binom{n}{۲}+\binom{n-۱}{۲}=(\tfrac{۱}{۲})(n)(n-۱)+(\tfrac{۱}{۲})(n-۱)(n-۲)=(\tfrac{۱}{۲})(n-۱)[n+(n-۲)]=(\tfrac{۱}{۲})(n-۱)(۲n-۲)=(n-۱)^۲$$

۱۷- گزینه «۱»

برای این که در هر حالت تعداد زنان از مردان بیشتر باشد باید یا ۷ یا ۸ یا ۹ یا ۱۰ زن در کمیته باشند یعنی:

$$\underbrace{\binom{۱۰}{۷}\binom{۱۰}{۵}}_{\text{۷ زن در کمیته}}+\underbrace{\binom{۱۰}{۸}\binom{۱۰}{۴}}_{\text{۸ زن در کمیته}}+\underbrace{\binom{۱۰}{۹}\binom{۱۰}{۳}}_{\text{۹ زن در کمیته}}+\underbrace{\binom{۱۰}{۱۰}\binom{۱۰}{۲}}_{\text{۱۰ زن در کمیته}}=\sum_{i=۷}^{۱۰}\binom{۱۰}{i}\binom{۱۰}{۱۲-i}$$

۱۸- گزینه «۳»

واضح است که چند ضعلی‌های ممکن می‌توانند از ۳ ضلع تا ۸ ضلع داشته باشند پس:

$$\text{تعداد کل چند ضعلی‌ها}=\binom{۸}{۳}+\binom{۸}{۴}+\binom{۸}{۵}+\binom{۸}{۶}+\binom{۸}{۷}+\binom{۸}{۸}=۲^۸-\left[\binom{۸}{۰}+\binom{۸}{۱}+\binom{۸}{۲}\right]=۲۵۶-[۱+۸+۲۸]=۲۱۹$$

۱۹- گزینه «۱»

$$\binom{۴}{۱,۱,۱}(۲)(-۱)(-۱)^۲=\frac{۴!}{۲!}(۲)(-۱)(-۱)^۲=-۲۴$$

۲۰- گزینه «۲»

$$(1+x)^n-\binom{n}{1}x^1(1+x)^{n-1}+\binom{n}{2}x^2(1+x)^{n-2}-\ldots+(-1)^n\binom{n}{n}x^n=[(1+x)-x]^n=1$$

۲۱- گزینه «۴»

اگر $1\le i\le 5, x_i$، تعداد آب‌نبات هر کودک باشد و x_1 تعداد آب‌نبات‌های کوچکترین کودک، پس x_1 یا ۱ است یا ۲.

اگر $x_1=1$:

$$x_2+x_3+x_4+x_5=14$$

پس $\binom{17}{13}=\binom{13+4-1}{13}$ حالت مختلف برای توزیع آب‌نبات‌ها بین کودکان وجود دارد، و اگر $x_1=2$:

$$x_2+x_3+x_4+x_5=13$$

پس در این حالت $\binom{16}{13}=\binom{4+13-1}{13}$، حالت برای توزیع آب‌نبات‌ها وجود دارد، پس تعداد حالات کل برابر است با $\binom{17}{14}+\binom{16}{13}$

۲۲- گزینه «۳»

تعداد راه حل‌های معادله داده شده با تعداد راه‌حل‌های معادله $x_1+x_2+\ldots+x_{10}\le 39 \quad x_i\ge 0, 0\le i\le 5$ برابر است و تعداد راه‌حل‌های این معادله به نوبه خود با تعداد راه‌حل‌های $x_1+x_2+\ldots+x_6=39 \quad x_i\ge 0, 0\le i\le 6$ برابر است. برای معادله اخیر $\binom{44}{39}=\binom{6+39-1}{39}$ راه حل وجود دارد پس گزینه ۳ صحیح است.

۲۳- گزینه «۱»

$$\binom{2n}{n}-\binom{2n}{n-1}=\frac{(2n)!}{n!n!}-\frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}=\frac{(2n)!(n+1)}{(n+1)!n!}-\frac{(2n)!n}{n!(n+1)!}=\frac{(2n)![(n+1)-n]}{(n+1)!n!}=\frac{1}{(n+1)}\frac{(2n)!}{n!n!}=\left(\frac{1}{n+1}\right)\binom{2n}{n}$$

۲۴- گزینه «۲»

در کل $\binom{10}{7}=\binom{10}{3}$ مسیر از (۰,۰) به (۷,۳) وجود دارد که هر یک از ۷ حرکت R, ۳ حرکت U شکل تشکیل شده است (حرکات در صفحه شطرنجی است که R یعنی حرکت به راست و U یعنی حرکت به بالا). از این $\binom{10}{7}$ حالت باید حالاتی را که شرط سوال را نقص می‌کنند حذف کنیم. برای مثال اگر فرض کنیم RURUURRRRR، شرایط مسئله نقص شده است (بعد از سومین U، اولین تناقض است). حال مسیر داده شده را به این صورت تبدیل می‌کنیم: $\text{RURUURRRRR}\leftrightarrow\text{RURUUUUUUU}$ در این تبدیل، تمام حرکات بعد از اولین تناقض را عوض کرده‌ایم یعنی Rها به U و Uها به R عوض شده‌اند. این تطابق نشان می‌دهد که تعداد مسیرهایی که شرایط مسئله را نقض می‌کند شامل ۸، U و ۲، R است که $\binom{10}{8}=\binom{10}{2}$ مسیر این‌گونه وجود دارد پس جواب مسئله به این صورت به دست می‌آید:

$$\binom{10}{7}-\binom{10}{8}=\frac{10!}{7!3!}-\frac{10!}{8!2!}=\frac{10!\times 8}{8!3!}=\left(\frac{5}{8}\right)\left(\frac{10!}{7!3!}\right)$$

۲۵- گزینه «۱»

اگر ۴۵ شیر را مانند ۴۵ کتاب در نظر بگیریم که ۱۵ دفتر را به قسمی که دو دفتر کنار هم قرار نگیرید بخواهیم بین آن‌ها قرار دهیم پاسخ به این صورت به دست می‌آید، بین ۴۵ کتاب ۴۶ فضای خالی وجود دارد یعنی یک فضا قبل از آن‌ها و یکی بعد از آن‌ها و ۴۴ فضا بین آن‌ها. حال انتخاب ۱۵ فضا از بین این ۴۶ فضا به $\binom{۴۶}{۱۵}$ حالت ممکن است.

این سوال را به این روش نیز می‌تواند پاسخ داد: اگر x_i تعداد شیرها سمت چپ iامین خط باشد $(۱ \le i \le ۱۵)$، و $x_{۱۶}$ تعداد شیرها سمت راست ۱۵امین خط باشد آن‌گاه جواب مسأله تعداد جواب‌های صحیح معادله زیر است:

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ + ... + x_{۱۵} + x_{۱۶} = ۴۵$$
$$x_۱ \ge ۰, x_{۱۶} \ge ۰, x_i > ۰, ۲ \le i \le ۱۵$$

که معادل است با تعداد جواب‌های صحیح معادله:

$$y_۱ + y_۲ + y_۳ + ... + y_{۱۵} + y_{۱۶} = ۳۱$$

فصل دوم

مبانی منطق و نظریه مجموعه‌ها

عناوین اصلی

- ادعاهای پایه‌ای، جدول‌های ارزش و قانون‌های منطق
- قاعده‌های استنتاج
- کلیاتی درباره نظریه مجموعه‌ها
- خلاصه فصل
- تست‌های آخر فصل
- پاسخ تست‌های آخر فصل

فصل دوم

مبانی منطق و نظریه مجموعه‌ها

۲. ۱- ادعاهای پایه‌ای، جدول‌های ارزش و قانون‌های منطق

در بسط هر نظریه ریاضی، ادعاها به صورت جمله بیان می‌شوند. این ادعاهای شفاهی یا کتبی را که «گزاره» می‌نامند.

جملاتی خبری‌اند که یا راست‌اند یا دروغ به عنوان مثال عبارت «عدد ۱۱ یک عدد اول است» یک گزاره است ولی عبارت «تکالیف را انجام بده» گزاره نیست. گزاره‌ای را که همیشه راست است«راستگو» **(Tautology)** و به گزاره‌ای که همیشه دروغ است یک «تناقض» **(Contradiction)** گفته می‌شود. راستگو را با **T** یا **Taut** و تناقض را با **F** یا **Cont** نشان می‌دهند.

مفهوم جدول ارزش را با یک مثال ساده بیان می‌کنیم.

مثال

۱- برای عبارت $\overline{p} \wedge q$ جدول ارزش رسم کنید.

p	q	$\overline{p} \wedge q$
۰	۰	۰
۰	۱	۱
۱	۰	۰
۱	۱	۰

در حقیقت جدول ارزش (جدول درستی) یک روش برای پی‌بردن به راستی (T) یا دروغی (F) یک گزاره است.

تعداد سطرهای لازم برای جدول ارزش به تعداد متغیرهای رابطه بستگی دارد مثلاً در مثال بالا که ۲ متغیر داشتیم $۲^۲ = ۴$ سطر ایجاد شد و برای رابطه‌ای که n متغیر دارد ۲^n سطر لازم است.

📖**نکته:** دو گزاره $S_۱$ و $S_۲$ را منطقاً هم‌ارز می‌نامند و به صورت $S_۱ \Leftrightarrow S_۲$ نوشته می‌شود وقتی که ارزش‌های $S_۱$ و $S_۲$ دقیقاً یکی است.

جدول ۲-۱. قانون‌های منطقی

قانون نقیض مضاعف	$\overline{\overline{P}} \Leftrightarrow P$
قانون‌های دمورگان	$\overline{p \vee q} \Leftrightarrow \overline{p} \wedge \overline{q}$ $\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q}$
قانون‌های تعویض‌پذیری	$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$
قانون‌های شرکت‌پذیری	$P \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$ $P \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$
قانون‌های خودتوانی	$P \vee P \Leftrightarrow P$ $P \wedge P \Leftrightarrow P$
قانون‌های همانی	$P \vee F \Leftrightarrow P$ $P \wedge T \Leftrightarrow P$
قانون‌های عکس	$P \vee \overline{P} \Leftrightarrow T_{\circ}$ $P \wedge \overline{P} \Leftrightarrow F$
قانون‌های غلبه	$P \vee T \Leftrightarrow T$ $P \wedge F \Leftrightarrow F$
قانون‌های جذب	$P \vee (P \wedge q) \Leftrightarrow P$ $P \wedge (q \vee P) \Leftrightarrow P$
قانون‌های توزیع‌پذیری	$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $P \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

تعریف ۲. ۱) اگر S گزاره‌ای (فقط شامل $\wedge$ - $\vee$،) باشد، دوگان S که با S^d نشان داده می‌شود گزاره‌ای است که با قرار دادن $\vee(\wedge)$ به جای هر مورد $\wedge(\vee)$ و قرار دارد F(T) به جای T(F) به دست می‌آید.

قضیه ۲. ۱) اصل دوگانی: اگر $S \Leftrightarrow T$، آن‌گاه $S^d \Leftrightarrow T^d$ (t,s گزاره‌هایی فقط شامل $\wedge$ ، $\vee$ هستند)

مثال

۲- آیا هم‌ارزی منطقی $P \to (q \wedge r) \Leftrightarrow (P \to q) \wedge (P \to r)$ درست است؟

پاسخ) برای تحقیق درستی این هم‌ارزی منطقی از جدول ارزش استفاده می‌کنیم:

p	q	r	$q \wedge r$	$P \to (q \wedge r)$	$P \to q$	$P \to r$	$(P \to q) \wedge (P \to r)$
۰	۰	۰	۰	۱	۱	۱	۱
۰	۰	۱	۰	۱	۱	۱	۱
۰	۱	۰	۰	۱	۱	۱	۱
۰	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
۱	۰	۱	۰	۰	۰	۱	۰
۱	۱	۰	۰	۱	۰	۰	۰
۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱