

دانش اگر در ثریا هم باشد مردمانی از سرزمین پارس بر آن دست خواهند یافت.

پیامبر اعظم (ص)

شرح جامع و نمونه سوالات

ریاضیات (محاسبات عددی)

«مهندسی کامپیوتر»

مولفان: مهندس مهدی دادبخش (مدیر گروه فناوری اطلاعات دانشگاه علمی کاربردی واحد ۲۵)

مهندس پریسا رحمانی (عضو هیئت علمی دانشگاه آزاد واحد پردیس)

انتشارات ارشد

پیشگفتار ناشر

خداوند بزرگ را شاکریم که فرصتی عنایت فرمود تا بتوانیم قدمی در جهت گسترش علم و فرهنگ کشور عزیزمان برداریم و مسیری هموار را در اختیار مخاطبان و داوطلبان علاقمند به ادامه تحصیل قرار دهیم. از آنجائی که درحوزه کتاب‌های درسی و کمک درسی کارشناسی ارشد کتاب‌های زیادی به رشته تحریر در آمده است با این حال وجود یک مجموعه جامع، دقیق، کامل و دارای رفرنس(منابع) مستند احساس می‌شود.

همیشه دغدغه داشتیم که ای کاش می‌شد تمامی منابع پراکنده و گاهاً دست نایافتنی کنکور در یک مجموعه به گونه‌ای جذاب و شیوا آماده می‌شد و همچنین سوالات دوره‌های قبل کنکور نیز به گونه‌ای تشریحی پاسخ داده می شدند، که خدشه‌ای بر آنها وارد نشود و خیال داوطلبان عزیز آنقدر آسوده باشد که اطلاعات مندرج در پاسخنامه‌ها را برای بهره‌گیری در آزمون خود بکار گیرند. این کار با یاری خداوند بزرگ و همکاری نخبه‌ترین دانشجویان و اساتید کشور در انتشارات ارشد هماهنگ گردید و در تمامی مقاطع تحصیلی از کاردانی به کارشناسی، کارشناسی ارشد و دکتری در حوزهٔ آزمون‌های سراسری – آزاد و پیام نور بسته‌های آموزشی شامل کتاب‌های بانک سوالات و کتاب‌های شرح جامع درس آماده گردید. در تهیه مجموعه‌های فوق‌الذکر از فارغ‌التحصیلان کارشناسی ارشد و دکتری که حائز رتبه‌های تک رقمی کنکور می‌باشند، استفاده کرده‌ایم، تا شما عزیزان بتوانید در راستای افزایش توان علمی خود در جهت نیل به مقصود خویش نایل آیید. بدون تردید می‌توان گفت که برای اولین بار در نظام آموزشی کشور مجموعه‌ای به این سبک عرضه می‌شود که در کیفیت و کمیت بی‌نظیر بوده و تمامی نیازهای دانشجویان و داوطلبان عزیز را پوشش می‌دهد. امید است که استفاده از این مجموعه عزیزان را در جهت موفقیت در آزمون یاری رسانده باشد. در پایان لازم به ذکر است که بی نقصی محض از آن خداوند متعال می‌باشد، بنا براین از تمامی خوانندگان و داوطلبان عزیز خواهشمندیم نظرات سازنده خود را در مورد این کتاب به سایت انتشارات ارشد اعلام نمایند تا ما را در جهت هر چه بهتر آماده کردن این محصولات یاری رسانند.

با تشکر

ناشـــــر

www.arshadbook. ir

تقدیم به:

پدر گرامی و بزرگوارم که چون کوهی استوار و پرتلاش

در تمام مراحل زندگی پشت و پناهم بوده است

و

مادر عزیز و مهربانم که شب زنده‌داری‌ها و دعاهای خیرش

سرمایه زندگی و آخرت من بوده است.

پیشگفتار مؤلف

درس محاسبات عددی یکی از دروس ریاضی است که در دوره کارشناسی تدریس می شود. در این درس، با روشهای غیرکلاسیک برای حل معادلات و انتگرالها و دستگاههای معادلات آشنا خواهید شد.

این کتاب مطابق با سرفصلهای مصوبه شورای عالی برنامه ریزی ستاد انقلاب فرهنگی تدوین شده است و برای دانشجویان کارشناسی و داوطلبین کنکور کارشناسی ارشد مناسب می باشد.داوطلبین کنکور کارشناسی ارشد با مطالعه این کتاب و پاسخگویی به سئوالات و مثالهای آن می توانند از آمادگی قابل توجهی برای آزمون برخوردار شوند.

در انتهای هر فصل سئوالت طبقه بندی شده مربوط به آن فصل و در انتهای کتاب سئوالات آزمونهای سراسری ادوار گذشته با پاسخ تشریحی ارائه شده است.

از اساتید و دانشجویان گرامی خواهشمند است با مطالعه این کتاب و ارائه پیشنهادها و راهنمایی‌های خویش ما را در تصحیح و تکمیل کتاب در نسخه های بعدی یاری نمایند.

در انتها، بر خود واجب می دانیم که از تمامی اساتیدی که در طول دوران تحصیل با رهنمودهای خویش ما را یاری نمودند نهایت سپاسگذاری را داشته باشیم، به ویژه جناب آقای دکتر معین تقوی که بخش عمده مطالب این کتاب از آموخته هایی است که در محضر ایشان کسب نموده ایم.

مهندس مهدی دادبخش
مدیر گروه فناوری اطلاعات
دانشگاه جامع علمی و کاربردی واحد ۲۵
www. mdadbakhsh. Ir

مهندس پریسا رحمانی
عضو هیأت عملی
دانشگاه آزاد اسلامی واحد پردیس

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

پیشگفتار ناشر ۳
پیشگفتار مؤلف ۵

فصل اول: خطاها

۱-۱) مقدمه ۱۳
۱-۲) منابع خطا ۱۳
۱-۳) انواع خطا ۱۵
تعریف خطای مطلق ۱۵
تعریف خطای نسبی ۱۶
تعریف خطای نسبی حدی ۱۶
۱-۴) خطای چهار عمل اصلی ۱۷
۱-۵) خطای محاسبه فرمول ۱۸
تست‌های آخر فصل ۲۱
پاسخ تست‌های آخر فصل ۲۲

فصل دوم: حل عددی معادلات جبری و غیرجبری

۲-۱) مقدمه ۲۷
۲-۲) روش رسم نمودار ۲۷
۲-۳) قضیه بولتزانو: ۲۹
۲-۴) تعیین ریشه‌ها با دقت مورد نظر ۲۹
۲-۵) روشهای حل عددی معادله $f(x)=0$ ۳۰
۲-۵-۱) روش اول: روش دوبخشی یا تنصیف: ۳۰
۲-۵-۳) روش سوم: روش نیوتن- رافسون ۳۴
۲-۵-۴) روش چهارم: روش نابجایی: ۳۸
۲-۵-۵) روش پنجم: روش وتری ۳۹
۲-۶) برنامه‌های مربوط به روشهای حل عددی معادلات جبری ۴۰

عنوان ..... صفحه

۲-۶-۱) پیاده سازی روش دوبخشی ۴۱
۲-۶-۲) پیاده سازی روش تکرار ساده ۴۲
۲-۶-۳) پیاده سازی روش نیوتن- رافسون ۴۳
۲-۶-۴) پیاده سازی روش نابجایی ۴۴
۲-۶-۵) پیاده سازی روش وتری ۴۴
تست‌های آخر فصل ۴۶
پاسخ تست‌های آخر فصل ۴۸

فصل سوم: درونیابی و برونیابی

۳-۲-۱) چند جمله‌ای لاگرانژ ۵۴
۳-۲-۲) چندجمله‌ای درونیاب برحسب تفاضلات تقسیم شده نیوتن: ۵۷
۳-۲-۳) تفاضلات متناهی: ۶۰
۳-۲-۴) چندجمله‌ای درونیاب به شکل دترمینان: ۶۵
۳-۳) خطای چندجمله‌ای درونیاب ۶۵
۳-۴) چندجمله‌ایهای چبیشف: ۶۸
۳-۵) برونیابی ۷۲
تست‌های آخر فصل ۷۴
پاسخ تست‌های آخر فصل ۷۶

فصل چهارم: مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری عددی

۴-۱) مقدمه ۸۳
۴-۲) مشتق‌گیری عددی ۸۳
۴-۲-۱) مشتق گیری براساس چندجمله‌ای درونیاب ۸۳
۴-۲-۲) مشتق‌گیری به کمک بسط تیلور ۸۵
۴-۳) انتگرال‌گیری عددی: ۸۷
۴-۳-۱) انتگرال‌گیری به روش ذوزنقه‌ای ۸۷
۴-۳-۲) انتگرال‌گیری به روش سیمپسون ۸۹
۴-۳-۳) انتگرال‌گیری به روش رامبرگ ۹۱
۴-۳-۴) انتگرال‌گیری به روش نیوتن- کاتس ۶۴
۴-۳-۵) انتگرال‌گیری به روش گاوس ۹۶
۴-۳-۶) انتگرال‌گیری به روش نقطه میانی ۱۰۰
۴-۴) برنامه‌های مربوط به روشهای انتگرال‌گیری عددی ۱۰۱
۴-۴-۱) پیاده سازی روش ذوزنقه‌ای ۱۰۲
۴-۴-۴) پیاده سازی روش گاوس سه نقطه‌ای ۱۰۳
تست‌های آخر فصل ۱۰۶
پاسخ تست‌های آخر فصل ۱۰۸

عنوان ..... صفحه

فصل پنجم: حل عددی معادلات دیفرانسیل

۵-۱) مقدمه ۱۱۵
۵-۲) روش تیلور مرتبهP: ۱۱۵
۵-۳) روش اویلر: ۱۱۶
۵-۴) روش پیراست اویلر: ۱۱۷
۵-۵) روش رونگه- کوتا: ۱۱۸
۵-۵-۱) روش رونگه- کوتای مرتبه دو: ۱۱۹
۵-۶) دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول ۱۲۱
۵-۷) برنامه‌های مربوط به روشهای حل معادلات دیفرانسیل: ۱۲۴
۵-۷-۱) پیاده سازی روش اویلر: ۱۲۴
۵-۷-۲) پیاده سازی روش رونگه- کوتای مرتبه دوم: ۱۲۵
تست‌های آخر فصل ۱۲۷
پاسخ تست‌های آخر فصل ۱۲۹

فصل ششم: حل دستگاه معادلات خطی و غیرخطی

۶-۱) مقدمه ۱۳۵
۶-۲) ماتریسها و بردارها: ۱۳۵
۶-۳) دستگاه معادلات خطی: ۱۳۶
۶-۳-۱) روش‌های مستقیم حل دستگاههای معادلات خطی: ۱۳۸
۶-۳-۲) روش‌های تکراری حل دستگاه‌های معادلات خطی: ۱۴۳
۶-۴) برنامه‌های مربوط به روشهای حل دستگاه معادلات: ۱۴۸
۶-۴-۱) پیاده سازی روش حذفی گاوس: ۱۴۸
۶-۴-۲) پیاده سازی گاوس- سایدل: ۱۵۰
تست‌های آخر فصل ۱۵۲
پاسخ تست‌های آخر فصل ۱۵۴

فصل هفتم: تعریف حداقل مربعات

۷-۱) مقدمه ۱۵۹
۷-۲) خط حداقل مربعات ۱۵۹
۷-۳) چندجمله‌ای حداقل مربعات ۱۶۲
۷-۴) تقریب حداقل مربعات در حالت نمایی ۱۶۳
۷-۵) تقریب حداقل مربعات در حالت هذلولی: ۱۶۴
۷-۶) تقریب حداقل مربعات در حالت مثلثاتی ۱۶۶
۷-۷) تقریب کمترین مربعات پیوسته ۱۶۷
تست‌های آخر فصل ۱۶۹
پاسخ تست‌های آخر فصل ۱۷۱

عنوان..... صفحه

سؤالات محاسبات عددی سراسری سال ۱۳۸۵ ..... ۱۷۹
پاسخ سؤالات محاسبات عددی سراسری سال ۱۳۸۵ ..... ۱۸۱
سؤالات محاسبات عددی سراسری سال ۱۳۸۶ ..... ۱۸۴
پاسخ سؤالات محاسبات عددی سراسری سال ۱۳۸۶ ..... ۱۸۶
سؤالات محاسبات عددی سراسری سال ۱۳۸۷ ..... ۱۸۹
پاسخنامه محاسبات عددی سراسری سال ۱۳۸۷ ..... ۱۹۱
سؤالات محاسبات عددی سراسری سال ۱۳۸۸ ..... ۱۹۳
پاسخنامه محاسبات عددی سراسری سال ۱۳۸۸ ..... ۱۹۵
منابع و مآخذ ۱۹۸

فصل اول

خطاها

عناوین اصلی

- مقدمه
- منابع خطا
- انواع خطا
- خطای چهار عمل اصلی
- خطای محاسبه فرمول
- تست‌های آخر فص
- پاسخ تست‌های آخر فصل

فصل اول

خطاها

۱-۱) مقدمه

هدف از محاسبات عددی، یافتن راه حلی برای مسائل عددی پیچیده می‌باشد، البته راه حلی که برمبنای اعمال ساده ریاضی باشد. این راه حلهای محاسباتی را الگوریتم (Algorithm) می‌نامند. با توجه به بحث این درس، الگوریتم عبارت است از روش حل یک مسئله ریاضی.

ممکن است برای برخی مسائل الگوریتم‌های متعددی وجود داشته باشد. در این حالت، برای انتخاب الگوریتم بهتر معیارهایی وجود دارد نظیر سرعت، دقت، سادگی، حجم کمتر، قابلیت تعمیم و... .

مهمترین این معیارها، سرعت و دقت هستند. امروزه کامپیوترها قادر به انجام محاسبات با سرعت بسیار بالا می‌باشند. هرچه سرعت بیشتر می‌شود امکان رخداد خطاها بیشتر می‌شود. در ادامه این فصل، خطاها و انواع آنها را بررسی می‌کنیم.

۱-۲) منابع خطا

خطاهایی که در مسائل ریاضی و محاسباتی رخ می‌دهند، به پنج دسته تقسیم می‌شوند:

۱- خطاهایی که در نحوه تعریف و بیان مسئله وجود دارند. گاهی باید برای مسائل طبیعی یک مدل ریاضی بسازیم و ممکن است برخی موارد را تقریبی در نظر بگیریم و از بعضی موارد چشم پوشی کنیم که این خود باعث بروز خطا می‌شود که به آن خطای مدل می‌گوییم.

۲- خطاهایی که ناشی از عملیات نامحدود و نامتناهی هستند. چون نمی‌توان یک عملیات نامتناهی را طی مراحل نامتناهی حل کرد، لازم است عملیات را در جایی قطع کرده و جواب تقریبی به دست آوریم. این کار باعث بروز خطای باقیمانده یا خطای برشی می‌شود.

۳- خطاهایی که در اندازه‌گیری‌های عددی با آنها مواجه هستیم. پارامترهایی که مقادیر آنها با استفاده از اندازه‌گیری به دست می‌آیند معمولاً تقریبی هستند و دقیق نیستند. این امر باعث بروز خطای داده‌ها می‌شود.

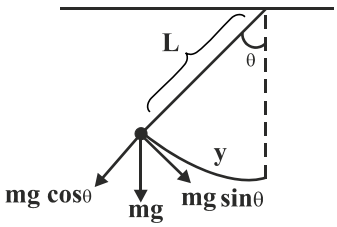
۴- در نمایش و ذخیره‌سازی برخی اعداد اعشاری نظیر $\pi, e, \frac{۱}{۳}$ و... مرتکب خطا می‌شویم زیرا نمایش اعشاری این گونه اعداد نامتناهی است و حافظه کامپیوتر محدود است. پس باید عدد را با تعداد ارقام متناهی و محدود در حافظه ذخیره کنیم. این امر باعث بروز خطای نمایش یا خطای گردکردن می‌گردد.

۵- در حین اجرا و انجام محاسبات با اعداد تقریبی، خطاهای مربوط به داده‌های اولیه و ورودی به نتیجه نهایی منتقل می‌شود. چنین خطایی را خطای عملیات می‌نامند.

برای درک بهتر موارد فوق، مثال زیر را در نظر بگیرید:

مثال۱-۱

فرض کنید می‌خواهیم حرکت یک آونگ یا پاندول ساده را بررسی کنیم و از اصطکاک نقطه آویز، مقاومت هوا و همه نیروها بجز نیروی جاذبه صرفنظر شده است و نخ غیرقابل کشش است.



m : جرم ذره پاندول

L : طول نخ

$$y = L\theta \ , \ e = m\gamma \ , \ \gamma = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{Ld^2\theta}{dt^2}$$

نیروی $mg\cos\theta$ با نیروی در امتداد کشش نخ خنثی می‌شود، پس داریم:

$$-mg\sin\theta = mL\frac{d^2\theta}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0 \rightarrow$$ یک معادله دیفرانسیل غیرخطی است.

$$\sqrt{\frac{g}{L}} = \omega \longrightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0 \rightarrow$$ خطی مرتبه دوم : $\lambda^2 + \omega^2 = 0$: فرض می‌کنیم

$$\Rightarrow \lambda = \pm i\omega \Rightarrow \theta = A\cos\omega t + B\sin\omega t \Rightarrow \theta\big|_{t=0} = 0 \Rightarrow 0 = A\,A \Rightarrow \theta = B\sin\omega t$$

دوره تناوب $T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

حال خطای رخ داده را بررسی می‌کنیم:

خطای نوع اول (خطای مدل) : چشم پوشی‌های اولیه و تقریب $\sin\theta$ به θ

خطای نوع دوم (خطای باقیمانده): جذرگیری برای محاسبه T

خطای نوع سوم (خطای داده‌ها): اندازه گیری طول نخ (L)

خطای نوع چهارم (خطای نمایش): نمایش عدد π

خطای نوع پنجم (خطای عملیات): انجام دو عمل ضرب و یک عمل تقسیم برای محاسبه T

نکته: برای گردکردن اعداد اعشاری روشهای مختلفی وجود دارد که در اینجا دو روش را بررسی می‌کنیم:

روش اول (قطع کردن): فرض کنید $A = u / a_1a_2...a_na_{n+1}...$ یک عدد اعشاری باشد که در آن u قسمت صحیح عدد و a_1 تا a_n ارقام اعشار آن هستند. فرض کنید می‌خواهیم عدد A را تا رقم n اعشار داشته باشیم. در این روش، ارقام اعشار بعد از a_n حذف می‌شوند و عدد بصورت زیر می‌گردد:

$$A = u / a_1a_2...a_n$$

این روش در کامپیوترهای قدیمی به کار می‌رفته و امروزه مرسوم نیست.

روش دوم (گردکردن): فرض کنید $A = u/a_1a_2...a_n$ یک عدد اعشاری است که می‌خواهیم آن را تا n رقم اعشار گرد کنیم. فرض کنید گردشده A را تا n رقم اعشار با a نمایش می‌دهیم و داریم:

۱- اگر $a_{n+1} < 5$ باشد، آنگاه $a = u/a_1a_2...a_n$ an

۲- اگر $a_{n+1} > 5$ باشد، آنگاه $q = u/a_1a_2...a'_n$ و $a'_n = a_n + 1$

۳- اگر $a_{n+1} = 5$ باشد و بعد از آن حداقل یک رقم مخالف صفر وجود داشته باشد مانند حالت قبل عمل می‌کنیم:

مثال : $A = 32/458750001010 \rightarrow a = 32/4588$ (۴ رقم)

۴- اگر $a_{n+1} = 5$ باشد و همه ارقام بعد از آن صفر باشد و a_n زوج باشد مانند ۱ عمل می‌کنیم و اگر a_n فرد باشد مانند ۲ عمل می‌کنیم.

قضیه: اگر a گردشده A تا n رقم اعشار باشد، داریم:

$$|A - a| \le 5 \times 10^{-(n+1)}$$

۱-۳) انواع خطا

فرض کنید عدد a تقریبی از A است و به جای آن در محاسبات به کار می‌رود.

تقریب نقصانی: اگر $a < A$ باشد آنگاه a را تقریب نقصانی (کوچکتر) a می‌نامند.

تقریب اضافی: اگر $a > A$ باشد آنگاه a را تقریب اضافی (بزرگتر) a می‌نامند.

مثال۱-۲

فرض کنید $A = \sqrt{3}$ **است. داریم:**

$$1/73 < \sqrt{3} < 1/74$$

بنابراین ۱/۷۳ تقریب نقصانی و ۱/۷۴ تقریب اضافی $\sqrt{3}$ می‌باشد.

تعریف خطای مطلق:

فرض کنید a تقریبی از A است. خطای مطلق a را با نماد $e(a)$ نشان می‌دهیم و بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$e(a) = |A - a|$$

بدیهی است که $e(a) \ge 0$ است و هرچه a به A نزدیکتر باشد $e(a)$ به صفر نزدیکتر خواهد بود و گوییم تقریب بهتر است.

اگر a گرد شده A تا n رقم اعشار باشد آنگاه $e(a) \le 5 \times 10^{-(n+1)}$ است.

تعریف خطای مطلق حدی:

فرض کنید a تقریبی از A باشد. به هر حد بالای خطای مطلق، خطای مطلق حدی گوییم و با نماد e_a نشان می‌دهیم. پس داریم:

$$e(a) \le e_a$$

نکته: e_a منحصر به فرد نیست ولی $e(a)$ منحصر به فرد است.

مثال۱-۳

فرض کنید A ریشه یک معادله است و به روشی به دست آورده‌ایم:

$a = ۳/۴۵۳۲$

$e(a) \le ۰/۰۰۰۱ \Rightarrow |A-a| \le ۰/۰۰۰۱$ (با خطای کمتر یا مساوی ۰/۰۰۰۱)

$\Rightarrow ۳/۴۵۳۱ \le A \le ۳/۴۵۳۳ \Rightarrow A = ۳/۴۵۳x \quad , \quad x = ۱$ یا ۲ یا ۳

یعنی در بسط A حتماً ۳/۴۵۳ وجود دارد ولی رقم چهارم اعشار یکی از ارقام ۱ تا ۳ می‌تواند باشد.

نکته: هرگاه e_n خطای مطلق حدی a به عنوان تقریبی از عدد A باشد، آنگاه:

$$|A-a| \le e_a \Rightarrow -e_a \le A-a \le e_a \Rightarrow a-e_a \le A \le a+e_a$$

بنابراین داریم:

$$A = a \pm e_a$$

تعریف خطای نسبی

فرض کنید a تقریبی از A باشد. خطای نسبی a را با نماد $\delta(a)$ نشان می‌دهیم و بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\delta(a) = \frac{e(a)}{|A|} \quad , \quad A \neq ۰ \qquad (۲)$$

خطای نسبی، خطا در واحد کمیت است.

نکته: اگر $\delta(b) > \delta(a)$ باشد، دقت اندازه‌گیری a بیشتر است.

مثال۱-۴

فرض کنید دو طول مختلف برحسب سانتیمتر به صورت زیر اندازه‌گیری شده‌اند:

$L_۱ = ۴۳۲/۷ \pm ۰/۱ \quad , \quad L_۲ = ۴/۳ \pm ۰/۱$

با وجود اینکه خطای مطلق حدی در هر دو عدد برابر ۰/۱ است ولی اندازه‌گیری $L_۱$ دقیقتر و بهتر است زیرا $L_۱$ بزرگتر از $L_۲$ است و میزان خطای آن نسبت به اندازه‌اش کمتر است و خطای نسبی کمتری دارد.

تعریف خطای نسبی حدی

فرض کنید a تقریبی از A باشد. هر حد بالای خطای نسبی را خطای نسبی حدی گوییم و با نماد δ_a نشان می‌دهیم. پس داریم:

$$\delta(a) \le \delta_a$$

۱-۴) خطای چهار عمل اصلی

۱- خطای جمع

فرض کنید a و b تقریبهایی از A و B باشند و همگی این اعداد مثبت باشند و e_a و e_b به ترتیب خطاهای مطلق عددی a و b باشند. حال می‌خواهیم $C = A + B$ را محاسبه کنیم. اگر خطای e_c خطای مطلق حدی حاصل جمع باشد داریم:

$$e_c \le e_a + e_b \qquad (۳)$$

۲- خطای تفریق (تفاضل)

فرض کنید a و b تقریبهایی از A و B باشند و e_a و e_b به ترتیب خطاهای مطلق حدی a و b باشند. حال اگر e_c خطای مطلق حدی $C = A - B$ باشد داریم:

$$e_c \ge e_a + e_b$$

مثال۱-۵

فرض کنید اعداد $\sqrt{۷}$ و $\sqrt{۵}$ را تا سه رقم اعشار گرد کنیم، مطلوب است محاسبه $\sqrt{۷} \pm \sqrt{۵}$ و محاسبه حداکثر خطای حاصل جمع و تفریق.

حل

داریم:

$$\sqrt{۷} = ۲/۶۴۶ + e_۱ \quad و \quad \sqrt{۵} = ۲/۲۳۶ + e_۲$$

منظور از $e_۱$ و $e_۲$ خطای مرتکب شده در نمایش $\sqrt{۷}$ و $\sqrt{۵}$ می‌باشد. چون تا سه رقم گرد کرده‌ایم، داریم:

$$e_۱ \le \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۳} \quad و \quad e_۲ \le \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۳}$$

بنابراین:

$$\sqrt{۷} + \sqrt{۵} = (۲/۶۴۶ + ۲/۲۳۶) + e_۳ = ۴/۸۸۲ + e_۳$$

چون $e_۳ \le e_۱ + e_۲$ است بنابراین $e_۳ \le ۱۰^{-۳}$ خواهد بود و داریم:

$$۴/۸۸ - ۱۰^{-۳} \le \sqrt{۷} + \sqrt{۵} \le ۴/۸۸۲ + ۱۰^{-۳}$$

همچنین برای تفریق داریم:

$$\sqrt{۷} - \sqrt{۵} = (۲/۶۴۶ - ۲/۲۳۶) + e_۴ = ۰/۴۱ + e_۴$$

$$e_۴ \le e_۱ + e_۲ \le ۱۰^{-۳} \Rightarrow ۰/۴۱ - ۱۰^{-۳} \le \sqrt{۷} - \sqrt{۵} \le ۰/۴۱ + ۱۰^{-۳}$$

۳- خطای ضرب

فرض کنید a و b با تقریبهایی از A و B باشند و e_a و e_b به ترتیب خطای مطلق حدی a و b باشند. حال اگر e_c خطای مطلق حدی $C = A \times B$ باشد داریم:

$$e_c \le a\,e_b + b\,e_a \qquad (۴)$$

مثال۱-۶

مقدار $\pi\sqrt{۳}$ را با چهار رقم اعشار محاسبه کرده و خطای حاصل ضرب را به دست آورید.

$$\pi = ۳/۱۴۱۶ + e_۱$$

$$\sqrt{۳} = ۱/۷۳۲۱ + e_۲$$

$$e_۱ \le \frac{۱}{۲}\times ۱۰^{-۴} \quad , \quad e_۲ \le \frac{۱}{۲}\times ۱۰^{-۴}$$

$$\pi\sqrt{۳} = (۳/۱۴۱۶\times ۱/۷۳۲۱) + e_۳$$

$$e_۳ \le ۳/۱۴۱۶ e_۲ + ۱/۷۳۲۱ e_۱ \Rightarrow$$

$$e_۳ \le \frac{۱}{۲}\times ۱۰^{-۴}(۳/۱۴۱۶ + ۱/۷۳۲۱) \Rightarrow$$

$$e_۳ \le \frac{۱}{۲}\times ۱۰^{-۴}(۴/۸۷۳۷) = ۲/۴۳۶۸\times ۱۰^{-۴}$$

اما داریم:

$$\pi\sqrt{۳} = ۵/۴۴۱۶ + e'_۳$$

$e'_۳$ خطای حدی کل است و داریم:

$$e'_۳ \le \frac{۱}{۲}\times ۱۰^{-۴} + e_۳ \Rightarrow e'_۳ \le ۰/۵\times ۱۰^{-۴} + ۲/۴۳۶۸\times ۱۰^{-۴} = ۲/۹۳۶۸\times ۱۰^{-۴}$$

$$\Rightarrow ۵/۴۴۱۶ - ۲/۴۳۶۸\times ۱۰^{-۴} \le \pi\sqrt{۲} \le ۵/۴۴۱۶ + ۲/۴۳۶۸\times ۱۰^{-۴}$$

$$\Rightarrow ۵/۴۴۱۴ \ge \pi\sqrt{۳} \le ۵/۴۴۱۸$$

۴- خطای تقسیم:

برای عمل تقسیم، ابتدا آن را به عمل ضرب تبدیل می‌کنیم و مانند ضرب عمل می‌کنیم.

۱-۵) خطای محاسبه فرمول

هرگاه تابعی n متغیره به صورت $w = f(x_۱, x_۲, ..., x_n)$ داشته باشیم و بخواهیم مقدار این تابع را در نقاط $A_i = a_i + e_{ai}$ برای $i = ۱, ..., n$ حساب کنیم، در این صورت داریم:

$$f(A_۱, A_۲, ..., A_n) = f(a_۱, a_۲, ..., a_n) + e_f$$

که در آن:

$$e_f \le e_{a_۱}\frac{\partial f}{\partial x_۱}\Big|_a + e_{a_۲}\frac{\partial f}{\partial x_۲}\Big|_a + ... + e_{a_n}\frac{\partial f}{\partial xn}\Big|_a \qquad (۵)$$

منظور از a بردار مقادیر تقریبی a_i یعنی $a = (a_۱, a_۲, ..., a_n)$ است و $\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_a$ به معنی محاسبه مقدار تابع $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ به ازای بردار a است.

مثال۱-۷

حجم کره‌ای به شعاع $\frac{۷}{۳}$ متر را حساب کرده و حداکثر خطای محاسبه را به دست آورید. (اعداد را تا چهار رقم اعشار گرد کنید.)

حجم کره : $V=\frac{۴}{۳}\pi r^{۳} \Rightarrow V=xyz^{۳}$

که در آن:

$$x=\frac{۴}{۳}=۱/۳۳۳۳+e_x \quad , \quad e_x \le \frac{۱}{۲}\times ۱۰^{-۴}$$

$$y=\pi=۳/۱۴۱۶+e_y \quad , \quad e_y \le \frac{۱}{۲}\times ۱۰^{-۴}$$

$$z=\frac{۷}{۳}=۲/۳۳۳۳+e_z \quad , \quad e_z \le \frac{۱}{۲}\times ۱۰^{-۴}$$

بنابراین داریم:

$$V=(۱/۳۳۳۳)(۳/۱۴۱۶)(۲/۳۳۳۳)^{۳}+e_v$$

$$V=۵۳/۲۰۹۷+e'_v$$

$$e'_v \le e_x\frac{\partial v}{\partial x}+e_y\frac{\partial v}{\partial y}+e_z\frac{\partial v}{\partial z}$$

$$e_v \le \frac{۱}{۲}\times ۱۰^{-۴}\left\{yz^{۳}+xz^{۳}+۳xyz^{۲}\right\}$$

در نتیجه:

$$x=۱/۳۳۳۳ \ , \ y=۳/۱۴۱۶ \ , \ z=۲/۳۳۳۳ \Rightarrow$$

$$e_v \le ۵\times ۱۰^{-۵}\left\{۳۹/۹۰۸۲+۱۶/۹۳۷۱+۶۸/۴۱۵۲\right\}$$

$$\Rightarrow e_v \le ۵\times ۱۰^{۵}(۱۲۵/۲۶۰۵) \Rightarrow e_v \le ۰/۰۰۶۳$$

$$\Rightarrow e'_v \le \frac{۱}{۲}\times ۱۰^{-۴}+۰/۰۰۶۳$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} e'_v \le ۵\times ۱۰^{-۵}+۰/۰۰۶۳ \Rightarrow e'_v \le ۰/۰۰۶۳۵ \\ V=۵۳/۲۰۹۷+۰/۰۰۶۳۵ \end{matrix}$$

مثال۱-۸

هرگاه $a=۰/۰۰۳$ تقریبی از $A=\frac{۱}{۳۰۰}$ باشد، خطای مطلق a را به عنوان تقریب A به دست آورید.

حل:

$$e(a)=|A-a|=\left|\frac{۱}{۳۰۰}-\frac{۳}{۱۰۰۰}\right|=\left|\frac{۱۰-۹}{۳۰۰۰}\right|=\frac{۱}{۳۰۰۰}$$

$$\Rightarrow e(۰/۰۰۳)=\frac{۱}{۳۰۰۰}$$

مثال۱-۹

هرگاه x و y را تا چهار رقم اعشار گرد کرده باشیم، مطلوب است محاسبه حداکثر خطای مرتکب شده در $x \pm y$ و xy (فرض کنید $x = \sqrt{۱۰},\ y = \pi$ باشد.)

حل:

بررسی $x + y$:

$$\sqrt{۱۰} = ۳/۱۶۲۳ + e_{\sqrt{۱۰}} \quad , \quad e_{\sqrt{۱۰}} \le \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۴}$$

$$\pi = ۳/۱۴۱۶ + e_{\pi} \quad , \quad e_{\pi} \le \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۴}$$

$$z = x + y = \sqrt{۱۰} + \pi = (۳/۱۶۲۳ + ۳/۱۴۱۶) + e_z = ۶/۳۰۳۹ + e_z$$

$$e_z \le e_{\sqrt{۱۰}} + e_{\pi} = (\frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۴}) + (\frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۴}) = ۱۰^{-۴}$$

$$\Rightarrow x + y \text{ حداکثر خطای } = ۱۰^{-۴}$$

بررسی $x - y$:

$$z = x - y = \sqrt{۱۰} - \pi = (۳/۱۶۲۳ - ۳/۱۴۱۶) + e_z = ۰/۰۲۰۷ + e_z$$

$$e_z \le e_{\sqrt{۱۰}} + e_{\pi} = (\frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۴}) + (\frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۴}) = ۱۰^{-۴}$$

$$\Rightarrow x - y \text{ حداکثر خطای } = ۱۰^{-۴}$$

بررسی xy :

$$z = xy = (۳/۱۶۲۳ \times ۳/۱۴۱۶) + e_z = ۹/۹۳۴۷ + e'_z$$

$$e_z \le ۳/۱۶۲۳ e_{\pi} + ۳/۱۴۱۶ e_{\sqrt{۱۰}} \le (۳/۱۶۲۳ + ۳/۱۴۱۶) \times \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۴}$$

$$e_z \le ۳/۱۵۲۰ \times ۱۰^{-۴}$$

$$e'_z \le (\frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۴}) + e_z \le (\frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۴}) + (۳/۱۵۲۰ \times ۱۰^{-۴}) = ۳/۶۵۲۰ \times ۱۰^{-۴}$$

$$\Rightarrow xy \text{ حداکثر خطای} = ۳/۶۵۲۰ \times ۱۰^{-۴} \le ۴ \times ۱۰^{-۴}$$

تست‌های آخر فصل

۱- اگر اعداد $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۵}$ را تا چهار رقم اعشار گرد کنیم، با توجه به خطای حاصل چه بازه‌ای برای $\sqrt{۲}-\sqrt{۵}$ به دست می‌آید؟

۱) $[۰/۸۲۱۹, ۰/۸۲۲۳]$
۲) $[۰/۸۲۱۸, ۰/۸۲۲۰]$
۳) $[۰/۸۲۱۵, ۰/۸۲۲۰]$
۴) $[۰/۸۲۱۵, ۰/۸۲۱۸]$

۲- اگر اعداد را تا چهار رقم اعشار محاسبه کنیم، حداکثر خطای محاسبه $\pi\sqrt{۲}$ چقدر است؟

۱) $۲/۲۷۷۹\times۱۰^{-۴}$
۲) $۱/۹۷۲۳\times۱۰^{-۴}$
۳) $۲/۱۲۴۶\times۱۰^{-۴}$
۴) $۲/۷۷۷۹\times۱۰^{-۴}$

۳- در تابع $f = xy^{۳}z^{۲}$ اگر خطای مطلق متغیرها Δx، Δy و Δz باشند، خطای نسبی تقریباً چقدر است؟

۱) $y^{۳}z^{۲}\frac{\Delta x}{x}+۳xyz^{۲}\Delta y+۲xy^{۳}\Delta z$
۲) $\frac{\Delta x}{x}+\frac{\Delta y}{y}+\frac{\Delta z}{z}$
۳) $\frac{\Delta x}{x}.\frac{\Delta y}{y}.\frac{\Delta z}{z}$
۴) $\frac{\Delta x}{x}+۳\frac{\Delta y}{y}+۲\frac{\Delta z}{z}$

۴- در تابع $y = ۳^{x}$ نسبت خطای نسبی y به خطای مطلق x چقدر است؟

۱) $۳x$
۲) ۳
۳) $xLn۳$
۴) $Ln۳$

۵- در محاسبه تابع $y = xLn\,x$، به ازای $x = \pi$ و $\pi = ۳/۱۴۲$ خطای مطلق حداکثر چقدر است؟

۱) $۲/۵۷\times۱۰^{-۳}$
۲) $۲/۵۹\times۱۰^{-۳}$
۳) $۱/۰۷۲\times۱۰^{-۳}$
۴) $۲/۱۷\times۱۰^{-۳}$

۶- در محاسبه $m = x^{۲}\cos y Lnz$ به ازای $x = ۱۰$، $y = ۰/۲۵$ و $z = ۳/۵$ حداکثر خطای مطلق چقدر است؟

۱) ۰/۲
۲) ۰/۱
۳) ۰/۱۵
۴) ۰/۲۵

پاسخ تست‌های آخر فصل

۱- گزینه «۲»

$$\sqrt{۲} = ۱/۴۱۴۲ + e_۱ \quad , \quad e_۱ \le \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۴}$$

$$\sqrt{۵} = ۲/۲۳۶۱ + e_۲ \quad , \quad e_۲ \le \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۴}$$

$$\sqrt{۵} - \sqrt{۲} = ۰/۸۲۱۹ + e_۳$$

$$e_۳ \le e_۱ + e_۲ = \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۴} + \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۴} \Rightarrow e_۳ \le ۱۰^{-۴}$$

$$\Rightarrow ۰/۸۲۱۹ - ۱۰^{-۴} \le \sqrt{۵} - \sqrt{۲} \le ۰/۸۲۱۹ + ۱۰^{-۴} \Rightarrow ۰/۸۲۱۸ \le \sqrt{۵} - \sqrt{۲} \le ۰/۸۲۲۰$$

۲- گزینه «۳»

$$\sqrt{۲} = ۱/۴۱۴۲ + e_{\sqrt{۲}} \quad , \quad e_{\sqrt{۲}} \le \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۴}$$

$$\pi = ۳/۱۴۱۶ + e_\pi \qquad e_\pi \le \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۴}$$

$$\pi\sqrt{۲} = (۳/۱۴۱۶ \times ۱/۴۱۴۲) + e_۱$$

$$e_۱ \le ۳/۱۴۱۶ e_{\sqrt{۲}} + ۱/۴۱۴۲ e_\pi$$

$$\Rightarrow e_۱ \le \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۴} (۳/۱۴۱۶ + ۱/۴۱۴۲)$$

$$\Rightarrow e_۱ \le \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۴} \times ۴/۵۵۵۸ = ۲/۲۷۷۹ \times ۱۰^{-۴}$$

خطای حاصل از ضرب $\pi\sqrt{۲}$ است.

$$\pi\sqrt{۲} = ۴/۴۴۸ + e_۲$$

$$e_۲ \le \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۴} + e_۱ = ۰/۵ \times ۱۰^{-۴} + ۲/۲۷۷۹ \times ۱۰^{-۴} = ۲/۷۷۷۹ \times ۱۰^{-۴}$$

۳- گزینه «۱»

$$\frac{\Delta f}{f} \le \frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\Delta x}{x} + \frac{\partial f}{\partial y}.\frac{\Delta y}{y} + \frac{\partial f}{\partial z}.\frac{\Delta z}{z}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^{۳}z^{۲} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = ۳x\,y^{۲}z^{۲} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial z} = ۲xy^{۳}z$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta f}{f} \le y^{۳}z^{۲}\frac{\Delta x}{x} + ۳xy^{۲}z^{۲}\frac{\Delta y}{y} + ۲xy^{۳}z\frac{\Delta z}{z}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta f}{f} \le y^{۳}z^{۲}\frac{\Delta x}{x} + ۳xyz^{۲}\Delta y + ۲xy^{۳}\Delta z$$

۴- گزینه «۴»

$$y = ۳^{x} \Rightarrow e_y = \frac{dy}{dx}e_x = Ln۳ \times ۳^{x} \times e_x$$

$$\text{خطای نسبی } y = \frac{ey}{y} = \frac{Ln۳ \times ۳^{x} \times e_x}{۳^{x}} = e_x Ln۳$$

بنابراین داریم:

$$\frac{\text{خطای نسبی } y}{\text{خطای مطلق } x} = \frac{exLn۳}{e_x} = Ln۳$$

۵- گزینه«۳»

$$e_y \le \frac{dy}{dx}e_x = (Ln\,x + ۱)\,e_x \le (Ln\,۳/۱۴۲ + ۱)\,e_x$$

$$\Rightarrow e_y \le (Ln\,۳/۱۴۲ + ۱)(\frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۴}) \Rightarrow e_y \le ۱/۰۷۲ \times ۱۰^{-۳}$$