فیزیک مکانیک و گرما

درسنامه جامع همراه با نمونه سوالات آزمونی

- اندازه گیری و بردار
- سینماتیک و دینامیک
- مرکز جرم و دروارن

مولف:
دکتر ابوذر کیانی

انتشارات اندیشه ارشد

فهرست

فصل اول: کمیت و اندازه‌گیری	۵
فصل دوم:بردارها	۱۱
فصل سوم:حرکت در یک بعد	۳۷
فصل چهارم:حرکت دوبعدی و سه‌بعدی	۷۰
فصل پنجم:قوانین نیروی نیوتن	۹۸
فصل ششم:دینامیک ذره	۱۳۴
فصل هفتم:کار و انرژی	۱۵۶
فصل هشتم:پایستگی انرژی	۱۷۷
فصل نهم:سیستم‌های ذرات	۱۹۵
فصل دهم:برخورد	۲۱۶
فصل یازدهم:سیستماتیک دورانی	۲۳۸
فصل دوازدهم:دینامیک دورانی	۲۴۹
فصل سیزدهم:تکانه زاویه‌ای	۲۷۱
فصل چهاردهم:تعادل	۲۸۶
فصل پانزدهم:نوسان	۲۹۱
فصل شانزدهم:گرانش	۳۰۹
فصل هفدهم:استاتیک شاره‌ها	۳۲۰
فصل هجدهم:دینامیک شاره‌ها	۳۳۱
فصل نوزدهم:حرکت موجی	۳۴۰
فصل بیستم:امواج صوت	۳۵۲
فصل بیست و یکم:دما	۳۶۴
فصل بیست و دوم:نظریه جنبشی گاز کامل	۳۷۲
فصل بیست و سوم:گرما و قانون ترمودینامیک	۳۸۶

فصل اول
کمیت و اندازه‌گیری

۱-۱-کمیت فیزیکی

سنگ بنای علم فیزیک کمیت‌های فیزیکی هستند که برای بیان قوانین این علم از آن‌ها استفاده می‌شود.

کمیت‌های فیزیکی دودسته‌اند. کمیت‌های اصلی و کمیت‌های فرعی

کمیت‌های اصلی عبارت‌اند از : زمان، طول، جرم، مقدار ماده، دمای ترمودینامیکی، جریان الکتریکی، شدت نور

کمیت‌های فرعی: کمیت‌هایی که بر اساس کمیت‌های اصلی بیان می شوند را کمیت‌های فرعی می‌نامند مانند سرعت، شتاب، میدان الکتریکی و ....

۱-۲- یکاهای فیزیکی

هر کمیت فیزیکی بر اساس یکایی خاص بیان می شود.به‌عنوان‌مثال در سیستم SI کمیت زمان بر اساس یکای ثانیه و کمیت دما بر اساس یکای کلوین بیان می شود.

- جدول کمیت‌ها و یکاهای اصلی در سیستم SI

یکای SI		
کمیت	نام	نماد
زمان	ثانیه	s
طول	متر	m
جرم	کیلوگرم	kg
مقدار ماده	مول	mol
دمای ترمودینامیکی	کلوین	K
جریان الکتریکی	آمپر	A
شدت نور	کاندلا	cd

نکته: اگر بخواهیم کمیت هایی مانند زمان بین دو رویداد هسته ای یا توان یک نیروگاه را برحسب یکا های SI بیان کنیم با اعداد بسیار بزرگ یا بسیار کوچک مواجه می شویم. برای ساده‌تر شدن بیان چنین کمیت هایی می توانیم از پیشوندهایی که در جدول زیر آمده است استفاده کنیم.

ضریب	پیشوند	نماد	ضریب	پیشوند	نماد
$۱۰^{۱۸}$	اگزا	E	$۱۰^{-۱}$	دسی	d
$۱۰^{۱۵}$	پتا	P	$۱۰^{-۲}$	سانتی	c
$۱۰^{۱۲}$	ترا	T	$۱۰^{-۳}$	میلی	m
$۱۰^{۹}$	گیگا	G	$۱۰^{-۶}$	میکرو	μ
$۱۰^{۶}$	مگا	M	$۱۰^{-۹}$	نانو	n
$۱۰^{۳}$	کیلو	k	$۱۰^{-۱۲}$	پیکو	P
$۱۰^{۲}$	هکتو	h	$۱۰^{-۱۵}$	فمتو	f
$۱۰^{۱}$	دکا	da	$۱۰^{-۱۸}$	آتو	a

- تبدیل واحدهای زیر را انجام دهید. (روش دلخواه)

a) $۳۴۰۰\,\text{nm} \rightarrow ?\,\text{cm}$

b) $۰/۰۰۰۱۲ \times ۱۰^{۲}\,\text{kg} \rightarrow ?\,\text{mg}$

c) $۱۲ \times ۱۰^{۴}\,\mu\text{m}^{۲} \rightarrow ?\,\text{hm}^{۲}$

d) $۱۲۰۰\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^{۳}} \rightarrow ?\,\frac{\text{gr}}{\text{cm}^{۳}}$

e) $۲۸\,\text{cm}^{۳} \rightarrow ?\,\text{mm}^{۳}$

- چگونه می‌توان: (به‌صورت تحلیلی و اختیاری)

الف) عرض یک رودخانه را بدون عبور از آن اندازه گرفت.

ب) جرم و حجم یک قطرهٔ آن را به‌دست آورد.

ج) جرم یک سوزن ته‌گرد را محاسبه کرد.

- مفاهیم زیر را به‌طور کامل توضیح و تعریف نمائید.

الف) اندازه‌گیری و خطا ب) یکای جرم، طول، زمان

۱-۳- استانداردهای سنجه

۱-استاندارد زمان

یکای اندازه‌گیری زمان در SI ثانیه است و یک ثانیه طبق تعریف برابر است با مدت‌زمان ۹۱۹۲۶۳۱۷۷۰ ارتعاش تابشی (با طول‌موج خاص) که از اتم سزیم گسیل می‌شود.

۲-استاندارد طول

یکای اندازه گیری طول در SI متر است و یک متر طبق تعریف طول راهی است که نور در خلأ در بازه زمانی ۱,۲۹۹۷۹۲۴۵۸ ثانیه می‌پیماید.

۳- استاندارد جرم

یکای اندازه‌گیری جرم در SI کیلوگرم است و استاندارد آن استوانه ای از جنس پلاتین – ایریدیم است که در اداره بین المللی اوزان نگهداری می شود.

۱-۴- ارقام بامعنی

برای تعیین تعداد ارقام بامعنی چند قاعده ساده وجود دارد.

۱- از چپ شروع کنید و بدون در نظر گرفتن صفرهای سمت چپ عدد تعداد رقم‌ها را تا نخستین رقم بشمارید.به عنوان مثال $x=3m$ و $x=0/003m$ هر دو دارای یک رقم بامعنی هستند ولی $x=3/0m$ و $x=0/0030m$ دارای دو رقم بامعنی هستند.

نکته مهم: معلوم نیست که $x=300m$ یک رقم بامعنی، دو رقم بامعنی و یا سه رقم بامعنی دارد. برای مشخص کردن وضعیت رقم های بامعنی آن باید به‌صورت های زیر نوشته شود.

$x=3\times10^{2}m$

$x=3/0\times10^{2}m$

$x=3/00\times10^{2}m$

۲- .هنگام ضرب و تقسیم، تعداد رقم هایی که درنتیجه نگه می دارید نباید بیشتر از تعداد رقم-های بامعنی عددی باشد که کمترین دقت را دارد. به‌عنوان‌مثال

$۱/۴\times۳/۲۵۴=۴/۵$

۳- هنگام جمع و تفریق، کم معنی ترین رقم های حاصل در همان‌جایی ظاهر می شود که در اعداد اولیه بودند.در این مورد آنچه اهمیت دارد تعداد رقم های بامعنی نیست بلکه جای قرار گرفتن آن‌هاست.به مثال زیر توجه کنید

۱۰۳/۹ kg

۲/۱۰ kg

۰/۳۱۹ kg

۱۰۶/۳۱۹ ۱۰۶/۳kg

۱-۵-تحلیل ابعادی

به هر کمیتی که محاسبه می کنیم معمولاً بعدی وابسته است.برای مثال کمیت فاصله بعد طـول دارد و با یکای متر اندازه‌گیری می شود.

چند نکته:

۱) هر کمیت را می‌توانیم برحسب یکا های متفاوتی بیان کنیم اما این کار بعد کمیت را عوض نمی کند.

۲) بعد کمیت فیزیکی A را با [A] نشان می دهیم. برای مثال اگر x نشان دهنده فاصله باشد [x]=L.

۳) ابعاد M و L و T را به‌عنوان ابعاد بنیادی در نظر می گیریم و بعد کمیت‌های فیزیکی فرعی را بر اساس این ابعاد بیان خواهیم کرد.

۴) هر معادله ای ازنظر ابعادی باید صحیح باشد یعنی بعد کمیت‌های هر دو طرف معادله باید یکی باشد.

۵) آرگومان توابع باید بدون بعد باشد برای مثال آرگومان y=sin(ωt) یعنی (ωt) باید بدون بعد باشد، پس اگر بعد t، T است باید بعد ω، $\frac{1}{T}$ باشد.

سؤالات آخر فصل:

۱- استاندارد زمان در سیستم SI چیست؟
۲- یک نانوثانیه برابر با چه مقداری است؟
۳- استاندارد طول در سیستم SI چیست؟
۴- واحد استاندارد جرم در سیستم SI چیست؟
۵- حاصل $۳\times۱۰^{۶}+۵/۰\times۱۰^{۵}$ برابر با چه مقداری است؟
۶- تعداد ارقام بامعنی ۰/۰۰۱۵۰ چقدر است؟
۷- عدد ۱۵/۰ دارای چند رقم بامعنی است؟
۸- حاصل عبارت ۲/۷ × ۳/۲ با توجه به تعداد ارقام بامعنی صحیح برابر با چه مقداری خواهد بود؟
۹- حجم مکعبی $۱cm^{۳}$ است. می‌توان گفت حجم این مکعب برابر با چه مقداری است؟
۱۰- فرض کنید A=BC و A دارای دیمانسیون $\frac{L}{M}$ وC دارای دیمانسیون $\frac{L}{T}$ است. در این صورت B دارای چه دیمانسیونی است؟
۱۱- فرض کنید $A = B^{m}C^{n}$ و A دارای بعد LT، B دارای بعد $L^{۲}T^{-۱}$ و C دارای بعد $LT^{۲}$ باشد. در این صورت مقدار m و n چقدر است ؟

پاسخ سؤالات آخر فصل

۱- واحد اندازه‌گیری زمان، ثانیه است و ثانیه برحسب فرکانس ساعت اتم سزیم استاندارد تعریف می‌شود. یعنی زمان لازم برای ۹۱۹۲۶۳۷۷۷ ارتعاش ایزوتوپ سزیم ۱۳۳.

۲- به جدول پیشوندها و توان‌های ۱۰ مراجعه کنید.

۳- واحد استاندارد طول، متر است و یک متر راهی است که نور در فاصله زمانی $\frac{۱}{۲۹۹۷۹۲۴۵۸}$ ثانیه طی می‌کند.

۴- کیلوگرم

۵-

$$۵/۰\times۱۰^{۵}=۰/۵\times۱۰^{۶}\Rightarrow ۵/۰\times۱۰^{۵}+۳\times۱۰^{۶}=۰/۵\times۱۰^{۶}+۳\times۱۰^{۶}=۳/۵\times۱۰^{۶}$$

۶- از سمت چپ به راست تعداد ارقام بدون صفرهای سمت چپ عدد، تعداد ارقام بامعنی خواهد بود.

۳ رقم بامعنی دارد ← ۰/۰۰۱۵۰

۷- سه.

۸- ازآنجایی‌که جواب نباید دارای ارقام بامعنی بیشتری نسبت به اعدادی که در هم ضرب شده‌اند باشد پس: ۸/۶ = ۲/۷ × ۳/۲

$$V=۱cm^{۳}$$

$$۱cm^{۳}=۱cm^{۳}\times\frac{۱۰^{-۶}m^{۳}}{۱cm^{۳}}\Rightarrow ۱cm^{۳}=۱۰^{-۶}m^{۳}\rightarrow V=۱۰^{-۶}m^{۳}$$

۹- دیمانسیون دو طرف معادله باید باهم برابر باشد.

$$A=BC\rightarrow\begin{cases}[A]=[B][C]\\ [A]=\frac{L}{M},[C]=\frac{L}{T}\Rightarrow\frac{L}{M}=[B]\frac{L}{T}\Rightarrow[B]=\frac{T}{M}\end{cases}$$

۱۰-

$$\begin{cases}A=B^{m}C^{n}\\ [A]=LT,[B]=L^{۲}T^{-۱},[C]=LT^{۲}\end{cases}\Rightarrow LT=(L^{۲}T^{-۱})^{m}(LT^{۲})^{n}\Rightarrow LT=L^{۲m+n}T^{۲n-m}$$

۱۱- با توجه به اینکه بعد دو طرف باید باهم برابر شود داریم:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{توان L} & \Rightarrow ۲m+n=۱\\ \text{توان T} & \Rightarrow ۲n-m=۱\end{array}\right\}\rightarrow n=\frac{۳}{۵},m=\frac{۱}{۵}$$

فصل دوم
بردارها

۲-۱- بردار اسکالر

هر کمیت را که قابل‌اندازه‌گیری باشد کمیت فیزیکی می‌گویند. کمیت‌های فیزیکی سه دسته‌اند.

۱- کمیت اسکالر

۲- کمیت برداری

۳- کمیت‌های تانسوری

کمیت‌های اسکالر: کمیت‌هایی که می‌توان با یک عدد و یک یکا که همان بزرگی است به‌طور کامل مشخص کرد را کمیت اسکالر می‌گویند. مانند جرم، طول، انرژی و...

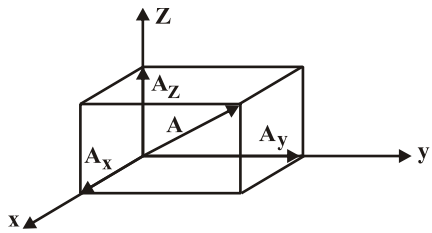
کمیت‌های برداری: کمیت‌هایی که علاوه بر بزرگی دارای جهت و سو نیز هست کمیت‌های برداری می‌گویند. مانند سرعت، نیرو، شتاب و...

کمیت‌های تانسوری: کمیت‌های تانسوری با بیش از سه مؤلفه مشخص می‌شوند. این کمیت‌ها به‌صورت ماتریس نمایش داده می‌شوند و در اجسام و محیط‌های ناهمسانگردی ظاهر خواهند شد. مانند لختی دورانی، فشار و...

با کمیت‌های اسکالر طبق قوانین معمولی جبر می‌توان کار کرد اما ازآنجایی‌که کمیت‌های برداری علاوه بر بزرگی دارای جهت نیز هستند روابط جبر بین آن‌ها را باید طوری تعریف کرد که جهت نیز در آن‌ها دخیل باشد.

۲-۲- نمادگذاری، تعاریف

بردار $\vec{A}$ با بیان مقدار و جهت آن نسبت به یک سیستم مرجع انتخابی مشخص می‌شود. هر بردار با یک پاره‌خط جهت‌دار مانند شکل زیر نمایش داده می‌شود.



همچنین می‌توان هر بردار را با مؤلفه‌هایش نشان داد. از علامت مؤلفه‌های (A_x, A_y, A_z) می‌توان برای نمایش بردار $\vec{A}$ استفاده کرد.

$$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$$

اگر $\vec{A}$ بردار جابه‌جایی دونقطه $P_1(x_1, y_1, z_1)$ و $P_2(x_2, y_2, z_2)$ باشد آنگاه $A_x = x_2 - x_1$ و $A_y = y_2 - y_1$ و $A_z = z_2 - z_1$ خواهد بود و اگر $\vec{A}$ نشان‌دهنده نیرو باشد، A_x مؤلفه این نیرو در جهت x است.

۲-۳- قوانین اصلی در جبر بردارها

۱- تساوی دو بردار:

دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ باهم برابرند، اگر و تنها اگر، مؤلفه‌های نظیرشان با یکدیگر برابر باشد یعنی:

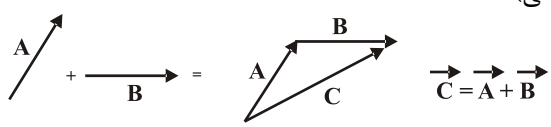
$$A_x = B_x \quad , \quad A_y = B_y \quad , \quad A_z = B_z$$

بردارهای مساوی با یکدیگر موازی‌اند و طول آن‌ها یکسان است ولی الزاماً موقعیت آن‌ها یکسان نخواهد بود.

۲- جمع بردارها:

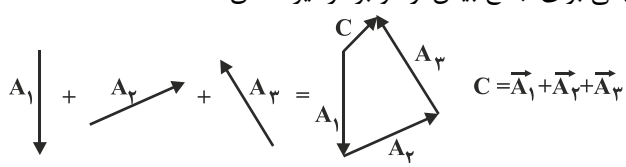
به دو روش ترسیمی (هندسی) و تحلیلی می‌توان بردارها را باهم جمع کرد.

الف) روش ترسیمی (هندسی)



$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$$

نکته: روش ترسیمی برای جمع بیش از دو بردار نیز صادق است.



ب) روش تحلیلی

جمع دو بردار به روش تحلیلی با معادله زیر تعریف می‌شود.

$$\vec{A}+\vec{B}=(A_x,A_y,A_t)+(B_x,B_y,B_z)=(A_x+B_x,A_y+B_y,A_z+B_z)$$

۳- ضرب اسکالر در بردار

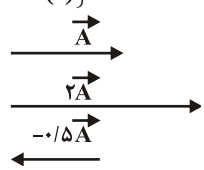
اگر k یک اسکالر و $\vec{A}$ یک بردار باشد، داریم:

$$k\vec{A}=k(A_x,A_y,A_z)=(kA_x,kA_y,kA_z)=k\vec{A}$$

$k\vec{A}$ برداری است که مؤلفه‌های آن k برابر مؤلفه‌های بردار $\vec{A}$ هستند. ازنظر هندسی جهت بـردار $k\vec{A}$ بستگی به مقدار k خواهد داشت به‌طوری‌که:

(۱) $k>0 \rightarrow k\vec{A}$ هم‌جهت با بردار $\vec{A}$ است.

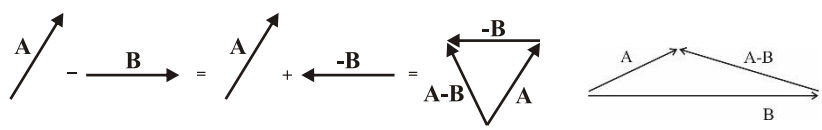
(۲) $k<0 \rightarrow k\vec{A}$ مخالف جهت بردار $\vec{A}$ است.



۴- تفریق بردارها

تفریق بردارها نیز به دو روش ترسیمی و تحلیلی قابل‌بررسی است.

روش ترسیمی



نکته: روش ترسیمی برای تفریق بیش از ۲ بردار نیز صادق است.

ب) روش تحلیلی

تفریق برداری به روش زیر تعریف می‌شود.

$$\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-\vec{B})=(A_x,A_y,A_z)+(-B_x,-B_y,-B_z)=(A_x-B_x,A_y-B_y,A_z-B_z)$$

مثال

دو بردار $\vec{A}=(۳,۲,۰)$ و $\vec{B}=(۰,۱,۳)$ مفروض‌اند. مطلوب است محاسبه $\vec{A}+\vec{B}$، $\vec{A}-\vec{B}$ و $\vec{A}+۲\vec{B}$.

حل:

$$\vec{A}+\vec{B}=(۳,۲,۰)+(۰,۱,۳)=(۳+۰,۲+۱,۰+۳)=(۳,۳,۳)$$

$$\vec{A}-\vec{B}=(۳-۰,۲-۱,۰-۳)=(۳,۱,-۳)$$

$$\begin{cases} ۲\vec{B} = ۲(۰,۱,۳) = (۰,۲,۶) \\ \vec{A} + ۲\vec{B} = (۳,۲,۰) + (۰,۲,۶) = (۳+۰,۲+۲,۰+۶) = (۳,۴,۶) \end{cases}$$

$$\begin{cases} ۲\vec{B} = ۲(۰,۱,۳) = (۰,۲,۶) \\ \vec{A} + ۲\vec{B} = (۳,۲,۰) + (۰,۲,۶) = (۳+۰,۲+۲,۰+۶) = (۳,۴,۶) \end{cases}$$

۵- بردار خنثی

بردار $O = (۰,۰,۰)$ را بردار خنثی می‌نامند. جهت این بردار نامشخص و تعریف‌نشده است.

۶- اصل جابجایی، شرکت‌پذیری، توزیع‌پذیری

این سه اصل در مورد بردارها به‌صورت زیر است.

۱- اصل جابجایی:

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$$

۲- اصل شرکت‌پذیری:

$$\vec{A}(\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}$$

۳- اصل توزیع‌پذیری:

$$k(\vec{A} + \vec{B}) = k\vec{A} + k\vec{B}$$

۷- اندازه یک بردار

اندازه بردار $\vec{A}$ را با نماد $|\vec{A}|$ نشان می‌دهیم و عبارت است از ریشه دوم مجموع مجذورات مؤلفه‌ها یعنی:

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^{۲} + A_y^{۲} + A_z^{۲}}$$

۸- بردار یکه پایه

بردار یکه برداری است که مقدار آن واحد باشد. معمولاً بردارهای پایه را با e نشان می‌دهند. سه بردار یکه

$$e_x = (۱,۰,۰) \quad , \quad e_y = (۰,۱,۰) \quad , \quad e_z = (۰,۰,۱)$$

را بردارهای یکه پایه می‌نامند.

هر بردار یکه را می‌توان به‌صورت جمع برداری مؤلفه‌ها برحسب بردارهای پایه به‌صورت زیر بیان کرد.

$$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z) = (A_x,۰,۰) + (۰,A_y,۰) + (۰,۰,A_z)$$
$$= A_x(۱,۰,۰) + A_y(۰,۱,۰) + A_z(۰,۰,۱) = A_x e_x + A_y e_y + A_z e_z$$

نمادهایی که کاربرد آن‌ها در مورد بردار یکه دستگاه دکارتی متداول است $\hat{i}$ و $\hat{j}$ و $\hat{k}$ هستند. یعنی:

$$e_x = (۱,۰,۰) = \hat{i} \ , \ e_y = (۰,۱,۰) = \hat{j} \ , \ e_z = (۰,۰,۱) = \hat{k} \Rightarrow \vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$

نکته: بردار $\vec{A}$ و $r\vec{A}$ $(r > 0)$ موازی و هم‌جهت هستند. درصورتی‌که $r = \frac{1}{|\vec{A}|}$ باشد، آنگاه $\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$ را که برداری هم‌جهت با بردار $\vec{A}$ هست، بردار یکه $\vec{A}$ می‌نامیم.

مثال

اگر داشته باشیم $\vec{A} = (3,2,2)$ و $\vec{B} = (4,0,3)$ ، اندازه بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ را به دست آورید. ب) بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ را برحسب بردارهای پایه دستگاه دکارتی بنویسید.

حل:

اندازه بردار $\vec{A}$ $|\vec{A}| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9+4+4} = \sqrt{17}$

اندازه بردار $\vec{B}$ $|\vec{B}| = \sqrt{4^2 + 0 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$

ب) $A = (3,2,2) = (3,0,0) + (0,2,0) + (0,0,2) = 3(1,0,0) + 2(0,1,0) + 2(0,0,1) = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$

به همین صورت $\vec{B} = 4\hat{i} + 3\hat{k}$

۲-۴- ضرب بردارها

۲-۴-۱- ضرب نقطه‌ای یا اسکالر

$$\vec{A}.\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

$$\vec{A}.\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta \qquad 0 \le \theta \le 2\pi$$

θ زاویه بین دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ است.

حاصل‌ضرب نقطه‌ای، یک عدد است.

اصل جابجایی و توزیع‌پذیری در مورد ضرب نقطه‌ای صادق است. یعنی:

۱- اصل جابجایی: $\vec{A}.\vec{B} = \vec{B}.\vec{A}$

۲- اصل توزیع‌پذیری

$$\vec{A}(\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A}.\vec{B} + \vec{A}.\vec{C} :$$

نکته:

ضرب نقطه‌ای بردارهای پایه به‌صورت زیر است:

$i.i = 1 \quad i.j = 0 \quad i.k = 0$

$j.i = 0 \quad j.j = 1 \quad j.k = 0$

$k.i = 0 \quad k.j = 0 \quad k.k = 1$

زاویه بین دو بردار با استفاده از ضرب نقطه‌ای به دست خواهد آمد.

$$\cos\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|} = \frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}\sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}}$$

نکته: شرط عمود بودن دو بردار غیرصفر $\vec{A}$ و $\vec{B}$ این است که:

$$A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z = 0$$

$$\vec{A}.\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z = 0$$

ضرب نقطه‌ای هر بردار در خودش برابر است با:

$$\vec{A}.\vec{A} = A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$$

مثال

اگر $\vec{A} = \hat{i} - x\hat{j} + \hat{k}$ و $\vec{B} = x\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ باشد. x را طوری پیدا کنید که دو بردار بر هم عمود باشند.

حل:

در صورتی دو بردار بر هم عمود هستند که ضرب نقطه‌ای آن‌ها صفر شود یعنی: $\vec{A}.\vec{B} = 0$

$$\vec{A}.\vec{B} \Rightarrow (1,-x,1).(x,2,-1) = 0 \Rightarrow x - 2x - 1 = 0 \rightarrow -x - 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

ضرب نقطه‌ای را ضرب داخلی نیز می‌نامند.

۲-۴-۲- ضرب خارجی یا برداری

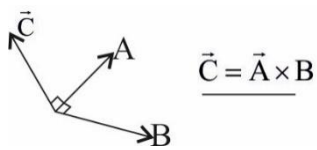
$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{i} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_Z \\ B_X & B_y & B_Z \end{bmatrix} = \left(A_yB_z - A_zB_y\right)\hat{i} + \left(A_ZB_x - A_xB_Z\right)\hat{j} + \left(A_xB_y - A_yB_x\right)\hat{k}$$

ضرب خارجی دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ بردار دیگری است مانند $\vec{C}$ که اندازه آن برابر است با:

$$\left|\vec{A}\times\vec{B}\right| = \left|\vec{C}\right| = \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\sin\theta \qquad 0 \le \theta \le \pi$$

و جهت آن‌که عمود بر $\vec{A}$ و $\vec{B}$ است از قاعده دست راست به دست می‌آید.

برای ضرب خارجی روابط زیر همواره برقرار است.



$$\vec{C} = \vec{A}\times B$$

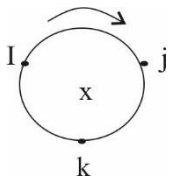
۱- ضرب خارجی غیرقابل جابجایی است. $\vec{A}\times\vec{B} = -\vec{B}\times\vec{A}$

۲- اصل توزیع‌پذیری $\vec{A}(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\times\vec{B} + \vec{A}\times\vec{C}$

۳- ضرب اسکالر در ضرب برداری $n(\vec{A}\times\vec{B}) = (n\vec{A})\times\vec{B} = \vec{A}\times(n\vec{B})$

ضرب خارجی هر بردار در خودش صفر است. $\vec{A}\times\vec{A} = 0$

ضرب خارجی بردارهای پایه به‌صورت زیر است:



$$i\times i=\circ \quad i\times j=k \quad i\times k=-j$$
$$j\times i=-k \quad j\times j=\circ \quad j\times k=i$$
$$k\times i=j \quad k\times j=-i \quad k\times k=\circ$$

نکته: با توجه به دو رابطه

$$\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}+(A_yB_z-A_zB_y)\hat{i}+(A_zB_x-A_xB_z)\hat{j}+(A_xB_y-A_yB_x)\hat{k}$$
$$\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}=\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\sin\theta$$

و اینکه $\vec{A}$ و $\vec{B}$ بردارهای غیرصفر هستند، در دو صورت حاصل‌ضرب خارجی دو بردار صفر خواهد بود.

۱) زاویه بین دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$، $\circ$ یا π باشد.

۲) اگر $\frac{A_x}{B_x}=\frac{A_y}{B_y}=\frac{A_z}{B_z}$ برقرار باشد. (یعنی موازی باشند)

۲-۴-۳- ضرب سه‌گانه

گاهی اوقات برحسب ضرورت، ضرب دیگری در مورد بردارها تعریف می‌شود که ضرب سه‌گانه نامیده می‌شود.

الف) ضرب سه‌گانه اسکالر: $\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C})$ را ضرب سه‌گانه اسکالر A و B و C گویند.

$$\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C})=\begin{vmatrix}A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\\ C_x & C_y & Cz\end{vmatrix}$$

حاصل‌ضرب سه‌گانه اسکالر A و B و C یک عدد است.

از این نوع ضرب برای به دست آوردن حجم متوازی‌السطوحی که سه بردار تشکیل می‌دهند استفاده می‌گردد.

دو رابطه مهم در ضرب سه‌گانه اسکالر

$$A.(\vec{B}\times\vec{C})=(\vec{A}\times\vec{B}).\vec{C}$$
$$\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}.(\vec{C}\times\vec{A})=\vec{C}.(\vec{A}\times\vec{B})$$

ب) ضرب سه‌گانه برداری

ضرب سه‌گانه برداری را به‌صورت

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=(\vec{A}.\vec{C})\vec{B}-(\vec{A}.\vec{B})\vec{C}$$

تعریف می‌کنیم که حاصل یک بردار است.

این نوع ضرب در مطالعه دوران سیستم‌های مختصات و دوران اجسام کاربرد دارد.

مثال

سه بردار $\vec{A}=۲\hat{i}+۲\hat{j}+\hat{k}$ و $\vec{B}=۴\hat{i}+۳\hat{k}$ و $\vec{C}=\hat{i}+\hat{j}$ مفروض است. مطلوب است:

$\vec{A}\times\vec{B}$ و $\vec{A}.\vec{B}$

ب) زاویه بین دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$

ج) $\vec{C}.(\vec{A}\times\vec{B})$

حل:

$$\vec{A}.\vec{B}=(۲,۲,۱).(۴,۰,۳)=۸+۰+۳=۱۱$$

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ ۲ & ۲ & ۱ \\ ۴ & ۰ & ۳ \end{vmatrix}=\hat{i}(۶-۰)+\hat{j}(۴-۶)+\hat{k}(۰-۸)=۶\hat{i}-۲\hat{j}-۸\hat{k}$$

ب) $\left|\vec{A}\right|=\sqrt{۲^۲+۲^۲+۱}=\sqrt{۹}=۳\ ,\ \left|\vec{B}\right|=\sqrt{۴^۲+۰+۳^۲}=\sqrt{۲۵}=۵$

$$\cos\theta=\frac{\vec{A}.\vec{B}}{\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|}=\frac{۱۱}{۳\times۵}=\frac{۱۱}{۱۵}\Rightarrow\theta=\cos^{-۱}\frac{۱۱}{۱۵}$$

ج) $\vec{A}\times\vec{B}=۶\hat{i}-۲\hat{j}-۸\hat{k}\Rightarrow\vec{C}.(\vec{A}\times\vec{B})=(۱,۱,۰).(۶,-۲,-۸)=۶-۲=۴$

۲-۵- مساحت و حجم به وجود آمده توسط بردارها:

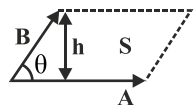
۲-۵-۱- مساحت متوازی‌الاضلاع

مساحت حاصل از دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ که یک متوازی‌الاضلاع است برابر اندازه حاصل‌ضرب خارجی دو بردار است.

$$\begin{cases} S=Ah \\ h=B\sin\theta \end{cases}\Rightarrow S=AB\sin\theta=\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|$$

نکته: مساحت مثلث حاصل از این دو بردار

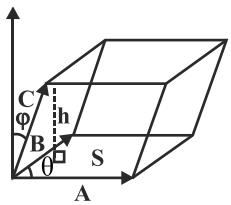
$$S_{\Delta}=\frac{۱}{۲}\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|$$



۲-۵-۲- حجم متوازی‌السطوح

اندازه حجم متوازی‌السطوح حاصل از سه بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ و $\vec{C}$ (در صفحه حاصل از بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ نیست) عبارت است از:

$$V = Sh = S(C\cos\varphi) = (C\cos\varphi).(AB\sin\theta) = C.C'\cos\varphi = \vec{C}.(\vec{A}\times\vec{B})$$



۲-۶- چند رابطه مهم

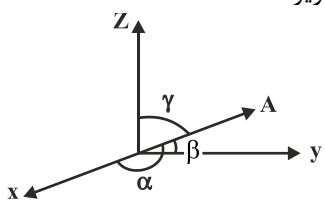
۲-۶-۱ قاعده کسینوس‌ها

اگر $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ آنگاه $C = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta}$ همچنین اگر $A=B$ باشد: $C = 2A\cos\frac{\theta}{2}$

اگر $\vec{C}' = \vec{A} - \vec{B}$ آنگاه $C' = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}$ همچنین اگر $A=B$ باشد: $C = 2A\sin\frac{\theta}{2}$

۲-۶-۲- کسینوس‌های هادی

بردار A در دستگاه دکارتی به‌صورت زیر است.



$$A_x = A\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{A_x}{A}$$

$$A_y = A\cos\beta \Rightarrow \cos\beta = \frac{A_y}{A}$$

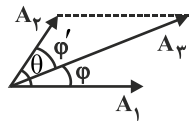
$$A_z = A\cos\gamma \Rightarrow \cos\gamma = \frac{A_z}{A}$$

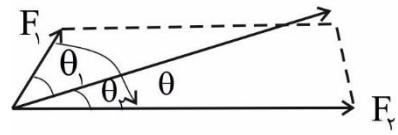
α و β و γ را زوایای هادی و $\cos\alpha$ $\cos\beta$ $\cos\gamma$ را کسینوس‌های هادی بردار A می‌نامیم و بین آن‌ها همواره رابطه زیر برقرار است.

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

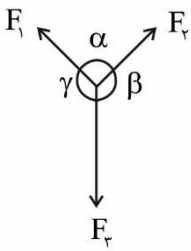
۲-۶-۳- زاویه بین بردار حاصل جمع و دو بردار مجاور

اگر داشته باشیم $\overrightarrow{A_۳} = \overrightarrow{A_۱} + \overrightarrow{A_۲}$ آنگاه:





$$\frac{R}{\sin\theta} = \frac{F_۱}{\sin\theta_۲} = \frac{F_۲}{\sin\theta_۱}$$



$$\frac{F_۱}{\sin\beta} = \frac{F_۲}{\sin\gamma} = \frac{F_۳}{\sin\alpha}$$

زاویه بین $\overrightarrow{A_۱}$ و $\overrightarrow{A_۳}$: $\varphi = \cos^{-۱}\dfrac{|A_۳|^۲ + |A_۱|^۲ - |A_۲|^۲}{۲|A_۳||A_۱|}$

زاویه بین $\overrightarrow{A_۲}$ و $\overrightarrow{A_۳}$: $\varphi' = \cos^{-۱}\dfrac{|A_۳|^۲ + |A_۲|^۲ - |A_۱|^۲}{۲|A_۳||A_۲|}$

زاویه بین $\overrightarrow{A_۱}$ و $\overrightarrow{A_۲}$: $\varphi = \cos^{-۱}\dfrac{|A_۳|^۲ - |A_۱|^۲ - |A_۲|^۲}{۲|A_۱||A_۲|}$ هست.

مثال

سه بردار A و B و C را چنان در نظر بگیرید که $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ و اندازه سه بردار به ترتیب ۸، ۶ و ۱۰ باشد. زاویه بین B و C را بیابید

$$\cos^{-۱}\frac{|B|^۲ + |C|^۲ - |A|^۲}{۲|B||C|} = \frac{۳۶ + ۱۰۰ - ۶۴}{۲\times۶\times۱۰} = \frac{۳}{۵} \Rightarrow \varphi = \cos^{-۱}\frac{۳}{۵} = ۵۳^\circ \qquad |C|^۲ + |B|^۲$$